

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 23 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25800215

研究課題名(和文) KPZ方程式に関連する可解確率過程の厳密な解析

研究課題名(英文) Exact analyses on integrable stochastic processes related to the KPZ equation

研究代表者

今村 卓史 (Imamura, Takashi)

千葉大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：70538280

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：1次元Kardar-Parisi-Zhang(KPZ)普遍クラスに属する確率過程について、その可積分構造を研究した。具体的には、KPZ方程式をレプリカ法を用いて解析し、Dotsenkoによって得られた空間2点相関関数の長時間極限が2型エアリー過程と呼ばれる確率過程と等価であることを明らかにした。またO'Connell-Yorポリマーモデルの行列式構造を考察し、GUEランダム行列との関連を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We have studied some integrable structures in the stochastic processes belonging to the one-dimensional Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) universality class: for the KPZ equation, we analyzed the KPZ equation using the replica approach and found out that the long time limit of the spatial two-point height correlation function obtained by V. Dotsenko is equivalent to the stochastic process called the Airy₂ process. We also considered determinantal structures for the O'Connell-Yor polymer model and clarified a relation to the GUE random matrices.

研究分野：非平衡統計物理学

キーワード：確率過程 可積分系 KPZ方程式 ランダム行列

1. 研究開始当初の背景

(1) Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式は界面成長を記述する代表的な確率偏微分方程式である。スケーリング、くりこみ群やモード結合理論等を用いて、界面揺らぎの普遍的な性質 (KPZ 普遍クラス) を説明でき、非平衡統計物理学において興味深い研究対象となっている。また KPZ 方程式は非線形項と揺動項を含み、それらの競合を記述する数学はいまだに未完成であることから、解析学、確率論等の数学の分野でも活発に議論されている。

(2) 2010 年以降、空間が 1 次元の場合における KPZ 普遍クラスの理解が急速に進展している。KPZ 方程式をはじめいくつかの可積分構造を持つ確率過程モデルが見出され、揺らぎのスケーリング指数のみならず、分布関数そのものの厳密解が得られている。2010 年に笹本-Spohn および Amir-Corwin-Quastel によって、*narrow-wedge* 型と呼ばれる初期条件において 1 次元 KPZ 方程式の高さ分布関数の厳密解が得られた。また高さ分布関数は、時刻無限大の極限で GUE Tracy-Widom 分布と呼ばれるランダム行列理論の最大固有値分布に収束することが示された。この成果は Dotsenko や Calabrese-Le Doussal-Rosso による KPZ 方程式のレプリカ法の開発、および可積分確率過程の研究の発展につながった。

(3) さらに 2011 年-2013 年に KPZ 方程式において現われた可積分構造の理解が深まり、同様の数理構造を持つ一群の確率過程が発見された。具体的には Borodin-Corwin によって Macdonald 過程が導入された。Macdonald 過程には KPZ 方程式や O'Connell-Yor ポリマーモデル等の物理的にも興味深いモデルを含み、Macdonald 差分作用素の性質を使って、物理量の q -Laplace 変換のフレドホルム行列式公式が得られる点で興味深い。さらに Borodin-Corwin-Sasamoto によって双対性を用いた解析手法が導入された。この手法は上記の KPZ 方程式のレプリカ法の正則化とみなすことができる。またこれまでは、主にある特定の初期条件 (KPZ 方程式においては *narrow-wedge* と呼ばれる初期条件対応する) の場合に研究が行われてきたが、物理的には、平坦型や定常型等の他の初期条件も重要である。KPZ 方程式においては平坦型の場合 Calabrese-Le Doussal、定常型の場合 Imamura-Sasamoto によって高さ分布の厳密解が得られた。

2. 研究の目的

(1) 上記の通り KPZ 普遍クラスを記述するいくつかのモデルが見出され、それらを厳密に解析する手法の理解が急速に進んでいる。このような研究は始まったばかりであり今後大きく進展するものと期待される。本研究の

目的は、KPZ 方程式に関連する可積分確率過程の数理構造を明らかにして、物理的に有用な結果を得ることである。

(2) これまでの研究は、物理量の 1 点分布関数に主眼を置いていて、その他の量については研究が不十分である。特に、統計物理学の観点では 1 点分布関数の情報だけでは不十分であり、時空間の 2 点相関関数の情報も重要である。しかし時空間 2 点相関関数を解析する手法は未開発なため、十分な議論が行われてこなかった。そこで可積分構造の理解が最も進んでいる KPZ 方程式について空間 2 点相関関数の厳密解について研究を行う。レプリカ法を 2 点相関関数の解析に適用して 2 点相関関数の導出を試みる。

(3) このようなモデルの相関関数の解析のためには、それらの可積分構造の理解が不可欠である。本研究の対象となる確率過程モデルの場合、ある量がフレドホルム行列式で書けるという著しい性質を示す。フレドホルム行列式は、イジングモデルや XY モデルなど自由フェルミオンの数理構造を持つモデルの研究に現われ、多点相関関数の厳密解も得られる。しかし本研究で扱うモデルは、自由フェルミオンではなく、マクドナルド多項式や Lieb-Liniger 模型など相互作用する量子系と関連している。したがって自由フェルミオンではない系において行列式構造がどのように現われるかを探究することは、重要なことと思われる。本研究ではその第一歩として O'Connell-Yor モデルと呼ばれるランダム媒質中のポリマーモデルにおける行列式構造の理解を深める。

3. 研究の方法

(1) 本研究は、数理的な手法で行われる。確率過程モデルにおいて物理的に興味のある量を近似を用いずに厳密に求め、この厳密解によって非平衡系の理解を深めるという方法である。具体的には KPZ 方程式の研究では、レプリカ法と呼ばれる手法を用いる。レプリカ法では、高さの N 次指数モーメントが、デルタ関数型の引力相互作用するボソン系 (Lieb-Liniger モデル) の虚時間シュレーディンガー方程式に従うことを用いる。Lieb-Liniger モデルはベータ仮説の手法で固有エネルギーと固有状態を厳密に求めることができる。したがって KPZ 方程式の指数モーメント母関数は、これらの固有エネルギーと固有値を用いて展開することができるのだが、驚くべきことに *narrow-wedge* 型初期条件の場合は、これらの展開を、一つのフレドホルム行列式にまとめ上げることができる。

(2) O'Connell-Yor モデルの行列式構造に関する研究では、Gaussian Unitary Ensemble (GUE) と呼ばれるクラスのランダム行列理論

の手法を参照する。GUE には n 点相関関数が $n \times n$ の行列式が書けるという特筆すべき行列式構造がある。さらに GUE の最大固有値の確率分布関数は一つのフレドホルム行列式で書かれ、その相関核はエルミート多項式を用いて表される。また GUE と反射相互作用するブラウン粒子系(以下反射ブラウン粒子系と呼ぶ)との関連における Warren のアプローチも参考にす。Warren は N 粒子反射ブラウン粒子系を考察するため、より自由度の大きい、Gelfand-Tsetlin 錘上の確率過程を考察する。これらの 2 つの周辺分布に着目することによって、 N 番目のブラウン粒子系の揺らぎと GUE の最大固有値分布の等価性を示している。

4. 研究成果

(1) 1次元 KPZ 方程式の、空間 2 点相関関数を考察した。Dotsenko はレプリカ法を用いてこの問題を解析し、2 点相関関数のフレドホルム行列式を用いた表示を得た。我々はこの Dotsenko の表示が長時間極限で、2 型エアリー過程と呼ばれる確率過程で記述されることを見出した。2 型エアリー過程は、GUE の動的な一般化であるダイソンモデルの最大固有値の運動を記述する確率過程であると同時に 1次元 KPZ 普遍クラスの相関関数普遍性を記述することが知られている。したがってこの研究によって、1次元 KPZ 方程式に関して、空間相関も含めて高さ揺らぎは KPZ 普遍クラスで記述できることを明らかにした。本研究の後、Dotsenko による KPZ 方程式の時間相関の研究や Nguyen-Zygouras らによる Log-Gamma ポリマーと呼ばれる他の離散モデルの空間相関の研究が行われるなど、時空間相関関数の研究の契機となった。本研究は Journal of Physics A 誌の Highlights of 2013 に選ばれた。またイギリス物理学学会の IOP select に選ばれた。

(2) 0' Connell-Yor ポリマーモデルにおける行列式構造を明らかにした。ポリマーの分配関数のラプラス変換のフレドホルム行列式表示は Borodin-Corwin によって得られていたが、我々はそれと等価な別の表示を得た。我々の表示では、相関核が 2 つの双直交関数を用いて表示される。零温度極限ではこの相関核はエルミート多項式を用いた GUE の相関核(エルミート核)に収束することを明らかにした。したがって我々の表示によって 0' Connell-Yor ポリマーモデルと GUE との関連がより明確になった。この結果を得るために我々はより大きな $N(N+1)/2$ 自由度の行列式型ウェイトを導入しその 2 つの周辺ウェイトがそれぞれ 0' Connell-Yor モデルのポリマーと我々の拡張された GUE に対応していることを示した。本研究結果はこのことから直ちに従う。

(3) KPZ 方程式や関連する可積分確率過程に

関する国際会議の組織委員を務めた。

① Interface fluctuations and KPZ universality class - unifying mathematical, theoretical, and experimental approaches、2014 年 8 月 20 日～2014 年 8 月 23 日、京都大学基礎物理学研究所(京都市左京区)

Webpage:

<http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~kpz2014.ws/index.html>

本研究分野における数学、理論物理、実験物理の研究者が集まった国際会議であり活発な議論や交流が行われた。

② Non-equilibrium dynamics of stochastic and quantum integrable systems、2016 年 2 月 16 日～2016 年 2 月 19 日、Santa Barbara (USA)

Webpage:

<https://www.kitp.ucsb.edu/activities/ra ndomkpz-c16>

カリフォルニア大学サンタバーバラ項のカブリ理論物理学研究で行われた。KPZ 系や確率過程だけでなく量子可積分系、冷却原始系等の量子系の研究者や、組み合わせ論や表現論等数学の研究者も集まり活発な意見交換を行った。

これらの分野は研究対象としては離れている印象があるが、研究手法が実は密接に関連していることが分かった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

① 今村 卓史、笹本 智弘、Determinantal Structures in the O'Connell-Yor Directed Random Polymer Model、Journal of Statistical Physics、査読有、163 巻、2016、675-713

DOI: 10.1007/s10955-016-1492-1

② 今村 卓史、笹本 智弘、Herbert Spohn、On the equal time two-point distribution of the one-dimensional KPZ equation by replica、Journal of Physics A、査読有、46 巻、2013、355002

DOI: 10.1088/1751-8113/46/35/355002

[学会発表] (計 11 件)

① 今村 卓史、0' Connell-Yor ランダムポリマーモデルにおけるゆらぎの厳密な解析、日本物理学会第 71 回年次大会、2016 年 3 月 21 日、東北学院大学泉キャンパス(宮城県仙台市泉区)

② 今村 卓史、Determinantal structures in the O'Connell-Yor polymer model、New

approaches to non-equilibrium and random systems: KPZ integrability, universality, applications and experiments, 2016年3月9日、Santa Barbara (USA)

千葉大学・理学研究科・准教授
研究者番号：70538280

- ③ 今村 卓史、Determinantal structures in a random polymer model、RIKKYO MathPhys 2016、2016年1月10日、立教大学(東京都豊島区)
- ④ 今村 卓史、O'Connell-Yor ランダムポリマーモデルにおける行列式構造、日本数学会 2015年度秋季総合分科会、2015年9月13日、京都産業大学(京都府京都市北区)
- ⑤ 今村 卓史、Determinantal structures in the O'Connell-Yor polymer、The 8th International Conference on Industrial and Applied Mathematics、2015年8月11日、Beijing (China)
- ⑥ 今村 卓史、Determinantal structures in the O'Connell-Yor directed random polymer model、38th Conference on Stochastic Processes and their Applications、2015年7月16日、Oxford (UK)
- ⑦ 今村 卓史、From q-TASEP to SHE、Random matrices, determinantal processes and integrable probability、2015年3月7日、大分国際交流会館(大分県別府市)
- ⑧ 今村 卓史、The O'Connell-Yor polymer and a deformed GUE weight、ランダム作用素のスペクトルと関連する話題、2015年1月9日、京都大学数理解析研究所(京都市左京区)
- ⑨ 今村 卓史、Replica approach to the 1d KPZ equation、京大基研セミナー、2013年10月30日、京都大学基礎物理学研究所(京都市左京区)
- ⑩ 今村 卓史、Replica analysis of the one-dimensional Kardar-Parisi-Zhang equation、Mathematical Statistical Physics、2013年7月30日、京都大学基礎物理学研究所(京都市左京区)
- ⑪ 今村 卓史、Exact height distribution for the stationary one-dimensional Kardar-Parisi-Zhang equation、STATPHYS25、2013年7月23日、Seoul (Korea)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今村 卓史 (IMAMURA, Takashi)