

平成 30 年 6 月 17 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2017

課題番号：25870159

研究課題名(和文)異なる次元の場の量子論の等価性に関する数理構造の直接解明

研究課題名(英文) Direct approach to the mathematical structure of the equivalence between quantum field theories in different spacetime dimensions

研究代表者

立川 裕二 (Tachikawa, Yuji)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・教授

研究者番号：10639587

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：申請時においては「異なる次元の場の量子論の等価性」は2009年に研究代表者が共著者 Alday および Gaiotto が提唱したように六次元の最大超対称理論から出発するもののみを思い描いていたが、その後の世界的な研究の進展により、六次元の最小超対称理論から出発することによって、さらに豊かな関連性が見出せることがわかりつつある。そこで、研究代表者は、この研究課題においては、おもにこの六次元の最小超対称理論の性質を解明することに力を注いだ。その中でも、六次元理論の量子異常の一般公式を見出した論文は広く引用されている。それ以外にも関連する研究を得、国際学会で招待講演を行った。

研究成果の概要(英文)：At the time of the grant application, only the equivalences of quantum field theories in different dimensions coming from 6d maximally supersymmetric theories were envisioned, following the original proposal made by me and coauthors Alday and Gaiotto. Since then, it became gradually clearer that one can obtain richer equivalences by starting from 6d minimally supersymmetric theories. For this reasons I put most of my efforts in studying the general properties of these 6d minimally supersymmetric theories. Among others, the formula for the quantum anomaly of general systems of this kind which I obtained with coauthors has been used widely in the literature. I also performed various related studies and gave multiple invited presentations.

研究分野：string theory, mathematical physics

キーワード：quantum field theory mathematics

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

この科研費を申請した2012年当時は、2009年に研究代表者が当時の同僚と発見したAlday-Gaiotto-Tachikawa 関係式が日本に留まらず国際的に広く研究されはじめたところであった。これは、六次元の最大超対称場の理論と呼ばれる特定の場の理論を四次元空間と二次元空間の直積において考察することにより、四次元空間の場の理論と二次元空間の場の理論に等価性が生じ、そこから当時未知であった種々の数理的な関係式が多数導かれたというものであった。

当初は、物理的な考察から導かれたこの関係であったが、当時は徐々に厳密な数学的な証明がなされつつあるという時期であった。

また、当時は、もともとの六次元を四次元と二次元にわけるというのみならず、六次元を三次元と三次元にわけるとも、もともとは六次元のA型理論から出発する関係式だった所を、六次元のD型やE型理論から出発するものへと拡張するなど、種々のヴァリエーションが提唱されていた。

2. 研究の目的

以上のような背景を鑑み、当初の研究目的は、これらの多様化する等価性、関係式のいろいろなあられのそれぞれについて研究するというよりは、これらの等価性、関係式の拠って立つ原因を同定しようというのが目的であった。その目的のために、第一の目標として、これらの等価性の基礎にある「超対称局所化」という手法についてよりよい理解をえること、第二の目標として、当時等価性の背後に見え隠れしていた、アフィンヘッケ代数との関連を理解すること、第三の目標として、超対称性を減らした場合に何が起こるかを理解すること、を掲げた。

3. 研究の方法

研究の大目標に達する為に、その道しるべとなるべき小目標を同定して、まずはそれを解決しようとする事を通じて、すこしずつ研究を進展させた。また、それぞれの小目標ごとに、その目標に関して深い知見を有する研究者を共同研究者として助力を願うようにした。

たとえば、上記の第一の目標として、当時、超対称局所化が可能であってしかるべき状況であるが、なされていなかった一番簡単なケースを考えると、それは二次元の平坦なトーラスであった。そこで、まずその状況での超対称局所化をなすことにしたが、

二次元の超対称理論の世界的権威である堀氏、彼の所でポスドクをしていたEager氏、および当時同じ分野で活躍しており、当時ポスドクですぐにイタリアに職を得たBenini氏の助力を仰いで共同研究を完成させた。

全般に、この研究課題は理論的な研究であるので、主に紙とペン、また、手計算では煩雑に過ぎるものに関しては、コンピュータ上で数式処理ソフトを使用して行った。また、黒板にチョーク、また白板にペンを用いて、また、電子メールを通じて、共同研究者と議論を積み重ねることによって行った。

4. 研究成果

(1) 二次元の平坦なトーラスにおける超対称局所化について、Benini, Eager, Hori と共に共著論文 [7] を発表した。このタイプの局所化は、ゲージ場を伴わない場合は古く九十年代前半にWittenによってなされていたが、ゲージ場が伴う場合は長らくなされていなかった。トーラス上のホロノミーの空間の上で積分する際に多数の困難が生じる。一時期私はこの問題を考え過ぎて夢の中で家の周りをパトカーに取り巻かれて拡声器で「なぜまだこの問題が解けないのだ！」と責められた。結局私自身にはその問題は解けず、共同研究者のBenini氏が救ってくれた。それを巧く回避する手法はJeffery-Kirwan留数の方法と呼ばれ、数学ではやはり九十年代前半に開発されていたが、理論物理の文脈では表立って使ったのは我々の共同研究がはじめてである。その後、このJeffery-Kirwan留数の方法は我々の業界では世界的に頻繁に使われる手法となった。二次元平坦トーラスにおける超対称局所化に限らず、Jeffery-Kirwan留数の手法を理論物理に紹介したという意味でも、有意義な研究だと考える。

(2) 上に述べたように、異なる次元の場の量子論の等価性は、六次元の最大(すなわち $N=(2,0)$)の超対称場の理論から出発するものからはじまったが、2013年暮れごろのハーバードからの論文によって、六次元の最小(すなわち $N=(1,0)$)の超対称場の理論から出発することによって、さらに豊かな関係性が得られるということが示唆された。ちなみに、このハーバードからの論文が発表された際、私は愚かにも見逃していたのだが、当時私の学生であった清水氏が私に重要性を指摘した。この六次元の最小超対称場の理論というのはそれまで余り考察されることがなかった対象であるため、未解決の問題が沢山あり、それをひとつひとつ解決することを目的とした。

たとえば、ある意味一番「小さい」非自明な六次元最小超対称場の理論はE弦理論と呼ばれ、90年代半ばからは存在は知られていたが、ほとんどその性質はわかっていなかった。まず当時の私の学生二人(大森氏、清水氏)と共に、この理論の量子異常を決定する論文 [6]を公表した。この論文での手法は、特殊な六次元最小超対称理論にしか使えなかったが、当時プリンストンの口頭研究所でポストドクであった米倉氏を共同研究者に加え、彼の助力を得ることで、手法を拡張し、ほぼ勝手な六次元最小超対称理論に対して量子異常が決定出来るようになった。これが論文[5]である。また、これらの成果を踏まえ、異なる次元の場の理論の関係を理解すべく、六次元最小超対称理論を平坦トーラスにコンパクト化して得られる四次元理論を考察したのが [3] である。ここにも、アフィンヘッケ群の作用が見え隠れするが、それを明らかにするに至っていない。

(3) また、もともとの目的である、六次元の最大超対称場の理論から出発して四次元二次元の場の理論の関係性を理解するという問題に対しては、いくつかレビュー招待論文を発表した [4], [1]。[4] は、この枠組みにおいて導入され、重要な役割をはたす四次元の理論である TN 理論についてレビューを行った。TN 理論に関する情報はさまざまな原著論文に散在していたため、有用であると期待している。[1] は四次元二次元対応を、四次元空間が S^4 の場合と $S^3 \times S^1$ の場合の二通りの典型例に関して、平行に初学者向けに説明したものになっている。この分野は S^4 の場合、 $S^3 \times S^1$ の場合が双方とも多数の原著論文が出ている為、興味ある初学者には研究に入り辛い状況であったと思われる。すこしでもそれが是正できていれば良いと思う。

(4) その他、関連した研究もおこなっている。例えば[2]では、2015年暮れに発見され、業界に驚きを持って迎えられた、四次元の $N=3$ 超対称理論について研究した。四次元の超対称理論は $N=1$, $N=2$, $N=4$ の三種類あるというのは数十年来教科書に書いてあることであるが、これは、ラグランジアンが書けるという仮定をおいての事である。ラグランジアンが書けないならば $N=3$ であっても問題はなかったが、実際にそれが思いの外簡単な構成で発見されたのは意外であった。それを場の理論的にしらべたのが [2] である。

5 . 主な発表論文等 (研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線) 〔雑誌論文〕(計 7 件)

主要論文のみ記す。全て査読済みである。

[1] Yuji Tachikawa,
"A brief review of the 2d/4d correspondences",
Journal of Physics, A50 号 (2017 年) 443012
DOI: [10.1088/1751-8121/aa5df8](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa5df8)

[2] T. Nishinaka and Y. Tachikawa,
"On 4d rank-one $N=3$ superconformal field theories",
Journal of High Energy Physics, 9 号(2016 年)116
DOI: [10.1007/JHEP09\(2016\)116](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2016)116)

[3] Kantaro Ohmori, Hiroyuki Shimizu, Yuji Tachikawa, Kazuya Yonekura
"6d $N=(1,0)$ theories on S^1/T^2 and class S theories: part II"
Journal of High Energy Physics, 12 号(2015 年)131
DOI: [10.1007/JHEP12\(2015\)131](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2015)131)

[4] Yuji Tachikawa,
"A review of the T_N theory and its cousins",
Progress of Theoretical and Experimental Physics,
2015 号(2015 年)11B102
DOI: [10.1093/ptep/ptv098](https://doi.org/10.1093/ptep/ptv098)

[5] Kantaro Ohmori, Hiroyuki Shimizu, Yuji Tachikawa, Kazuya Yonekura,
"Anomaly polynomial of general 6d SCFTs",
Progress of Theoretical and Experimental Physics,
2014 号(2014 年)103B07
DOI: [10.1093/ptep/ptu140](https://doi.org/10.1093/ptep/ptu140)

[6] Kantaro Ohmori, Hiroyuki Shimizu, Yuji Tachikawa,
"Anomaly polynomial of E-string theories"
Journal of High Energy Physics, 8 号(2014 年)2
DOI: [10.1007/JHEP08\(2014\)002](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2014)002)

[7] F. Benini, R. Eager, K. Hori, Y. Tachikawa
"Elliptic genera of two-dimensional $N=2$ gauge theories with rank-one gauge groups"
Letters in Mathematical Physics, 104 号(2013 年)
465-493
DOI: [10.1007/JHEP08\(2013\)115](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2013)115)

〔学会発表〕（計 5 件）

すべて招待講演である。

(1)

Yuji Tachikawa,

"Recent Advances in SUSY",

Strings 2014, 2014 年 06 月 23 日~2014 年 06 月 27 日, Princeton, New Jersey, USA

(2)

Yuji Tachikawa,

"Comments on SUSY Quantum Field Theories",

XXXth International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, 2014 年 07 月 14 日~2014 年 07 月 18 日, Ghent, Belgium

(3)

Yuji Tachikawa,

"Twenty Years of the Seiberg-Witten Theory",

String Theory and Mathematical Sciences in the 21st Century, honoring Prof. Edward Witten's Kyoto Prize, 2014 年 11 月 12 日~2014 年 11 月 12 日, 京都、国立京都国際会館

(4)

Yuji Tachikawa,

"6d SCFTs and F-theory: a bottom-up perspective",

F-theory @ 20 conference, 2016 年 02 月 22 日~2016 年 02 月 26 日, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA

(5)

Yuji Tachikawa,

"On 4d N=3 theories",

JHS75 (the 75th-year-anniversary conference for John H. Schwarz), 2016 年 11 月 18 日~2016 年 11 月 19 日, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA

〔図書〕（計 1 件）

Yuji Tachikawa,

"N=2 Supersymmetric Dynamics for Pedestrians",

Springer, 2015, Lecture Notes in Physics vol. 890, DOI:10.1007/978-3-319-08822-8

紙に印刷しておよび電子ブックとして出版されている。出版社ではオープンアクセスでないが、同内容のものを出版社の許諾の元 <https://arxiv.org/abs/1312.2684> に公開してある。

6 . 研究組織

(1)研究代表者

立川 裕二 (TACHIKAWA, Yuji)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・教授

研究者番号：10639587