様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２０ 日現在

機関番号：１２６１３
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８７０２３４

研究課題名（和文）パンルヴェ方程式と無限可積分系の幾何学的研究

研究課題名（英文）Geometric study of Painleve equations and infinite integrable systems

研究代表者
津田　照久（Tsuda, Teruhisa）

一橋大学・大学院経済学研究科・准教授

研究者番号：００４５２７３０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：線形常微分方程式のモノドロミーを不変に保ちつつ特異点での特性指数を整数だけずらす変換をSchlesinger変換という。本研究ではHermiteによる二つの近似問題とそれらの双対性が，あるクラスのSchlesinger変換を導くことを示した。また近似問題の非斉次的な表現とベクトル連分数展開の等価性を通して，Schlesinger変換を構成するアルゴリズムを与えた。近似の剰余がToeplitz行列式を用いて記述されることから，パンルヴェ方程式等，モノドロミー保存変形の解の行列式構造の自然な理解が得られた。以上の結果は，有理函数近似の理論とモノドロミー保存変形の理論を繋ぐ重要なものである。

研究成果の概要（英文）：We develop an underlying relationship between the theory of rational approximations and that of isomonodromic deformations. We show that a certain duality in Hermite's two approximation problems for functions leads to the Schlesinger transformations, i.e. transformations of a linear differential equation shifting its characteristic exponents by integers while keeping its monodromy invariant. Since approximants and remainders are described by block-Toeplitzs determinants, one can clearly understand the determinantal structure in isomonodromic deformations. We demonstrate our method in a certain family of Hamiltonian systems of isomonodromy type including the sixth Painleve; equation and Garnier systems; particularly, we present their solutions written in terms of iterated hypergeometric integrals. An algorithm for constructing the Schlesinger transformations is also discussed through vector continued fractions.

研究分野：数物系科学

キーワード：パンルヴェ方程式　超幾何函数　無限可積分系　有理函数近似　連分数

１．研究開始当初の背景

パンルヴェ微分方程式の起源は，20 世紀初頭の P．パンルヴェ等による，動く特異点は高々極に限るという性質，即ち，パンルヴェ性を持つような２階代数的常微分方程式の分類という純粋数学的な問題に遡る。そこには微分方程式を使って新しい特殊関数，特に楕円関数の一般化を指向する時代背景があった。のちに，線形常微分方程式のモノドロミー保存変形としての導出や，ソリトン系等の無限次元可積分系の簡約との対応，乱雑行列理論との関係等，最早，数学を越えた様々な数理物理的な問題とパンルヴェ方程式の繋がりも明らかになってきている。

研究代表者が 2002 年に発表した UC 階層も，全てのパンルヴェ微分方程式を KP 階層のような１成分のソリトン理論の枠組みで捉えることを一つの動機として，得られた無限次元可積分系である。UC 階層が普遍指標（多項式）の特徴づける可積分系であることから，パンルヴェ方程式と一般線形群の表現論，あるいは対称多項式の理論との関係に新しい視座が与えられた。

一方で，有理曲面あるいは有理代数多様体の上に作用するクレモナ変換群(双有理変換群)が q-差分類似などの離散版をも含んだパンルヴェ型方程式の時間発展の幾何学的な起源であることが分かっている。パンルヴェ型方程式の持つ様々な性質の理解を幾何学的見地から深めることはますます重要な課題となってきている。

２．研究の目的

パンルヴェ方程式及び背景にある無限次元可積分系を研究対象に，ヤング図形の組み合わせ論・表現論や超幾何函数論との関係を幾何学的手法によって明らかにすることである。

３．研究の方法

研究の進行には主として，有理代数多様体の代数幾何，無限次元リー環の表現論，線形常微分方程式の変形理論，離散力学系の手法，有理函数近似の理論や（ベクトル）連分数の理論を用いる。

４．研究成果

(1) 本研究では UC 階層の相似簡約(similarity reduction)から得られるあるハミルトン系の族と一般化された超幾何函数の関係を明らかにした。

このハミルトン系は，研究代表者による以前の研究によって構成された対象で，パンルヴェ第 VI 型方程式やガルニエ系等のモノドロミー保存変形型の重要な非線形可積分系に対して，統一的な表示を与えている。その相空間は，一般に複雑な代数多様体ではあるが，じつはパラメーターが特別な値の場合，ちょうど半分の次元を持った複素射影空間が時間発展で不変な部分多様体として存在している。よく知られているように複素射影空間は，線形微分方程式系の初期値の空間と看做されるが，実際，この複素射影空間上に制限されたハミルトン系の解は，可積分な線形パッフ系を満たすことが分かり，超幾何型の特殊函数による具体的な記述を持つ。現れる特殊函数は，ガウスの超幾何函数の多変数化（アッペル–ロリチェラの超幾何函数）と高階化（トマエの超幾何函数）の双方を巧く補間するような大変に興味深い対象である。オイラー型積分表示式の列を，ある単純な変換の合成繰り返しで生成するという手法によって，リーマン図式から指定される特徴的な振る舞いを持つ基本解行列を構成した。より正確に述べると，オイラー型積分の列に擬周期条件を課すことで，超幾何函数の独立変数が自然に現れる，という仕組みになっている。擬周期条件を課さなければ，ベータ積分の類似が無限に並んだ系列が得られるのだが，それ自体の研究も今後大切な主題になるものである。今回用いたアイデアは，古典的なガウスの超幾何函数の場合に対しても新しいものであり，特殊函数論の観点からも興味深い。

逆に当該の可積分な線形パッフ系が，ある意味においてモノドロミー保存変形を予め内包していることを示した。具体的には，線形パッフ系の階数を適当に大きくとると，ある特殊なパラメーターの条件の下で，モノドロミー保存変形のラックス形式が（もちろん可約な場合であるが）そのまま得られる。鍵となったのは，超幾何函数解に対応する波動函数がスティルチェス型の積分表示を持つという発見である。

(2) 線形常微分方程式のモノドロミーを不変に保ちつつ特異点での特性指数を整数だけずらす変換をシュレジンジャー変換という。これはモノドロミー保存変形方程式の立場から見ると，離散的な対称性（ベックルント変換）の１つと看做される。本研究では，エルミートによる二つの近似問題（エルミート―パデ近似と同時パデ近似）とそれらの間の双対性（マーラー双対性）が，あるクラスのシュレジンジャー変換を導くことを示した。また，エルミート―パデ近似の非斉次的な表現とあるベクトル連分数展開の等価性を通して，シュレジンジャー変換の構成のアルゴリズムを与えた。これは，所謂ユークリッドの互除法の高次元版の一つと看做され，ベクトル連分数は，古典的なスティルチェス型の連分数に対する新たな拡張となっている。近似問題の剰余項はブロック・テプリッツ行列式の比を用いて記述されることから，

パンルヴェ方程式等のモノドロミー保存変形方程式の解の持つ行列式構造が自然に理解できる点が重要である。とくに，パンルヴェ方程式の一般解の持つヤコビ―トゥルディ型公式と呼ばれるヤング図形でパラメーター付けられる行列式構造が，「線形」常微分方程式の理論の範疇で捉えられるようになったことは大きな成果といえよう。

なお，パンルヴェ方程式の超幾何函数解に付随する線形方程式は可約となり，その波動函数は スティルチェス型の積分表示を持つ（上の(1)参照）。このことは多重直交多項式の理論との関わりを強く示唆するもので興味深い。前述の解の行列式構造に対して，ファンデルモンドによる差積と行列式の公式，および，フビニの定理を介することによって，解の超幾何型反復積分による表示公式を構成することに成功した。これらの結果は，有理函数近似の理論とモノドロミー保存変形の理論を繋ぐ重要なものであり，今後とも継続して研究するべき主題である。

(3) 本研究では，確定特異点型のみに限らず，不確定特異点を持つことも許すような線形常微分方程式の一般化モノドロミー保存変形（所謂，ホロノミック変形）について，エルミート―パデ近似と同時パデ近似を適用することによって，付随するタウ函数の比（tau-quotient）の行列式表示を得た。対象となるシュレジンジャー変換の指数は特別なものではあるものの，従来知られていた行列式公式に比較して，ブロック・テプリッツ行列式を用いた非常に簡明なものとなっている。なお，Tau-quotient が簡明な記述を持つことは，特別な指数の時にマーラー双対性が顕在化すること，ベクトル連分数展開が現れることに関係してくるようなのだが，この現象の解明は本研究から派生した新しい課題である。

また Tau-quotient の行列式表示の証明においては，シルベスターの公式の類似と看做せる行列式の恒等式の成立が鍵となった。なお，恒等式の証明自体が興味深い内容を持っており，パフィアン版への拡張を含んだ一般的な状況でこれの証明を与えた。この結果については論文を現在準備中である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 4 件）

(1) T. Mano and T. Tsuda, Hermite-Pade approximation, isomonodromic deformation and hypergeometric integral, Math. Z. 285 (2017) 397--431. Doi: 10.1007/s00209-016-1713-y
(査読有り)

(2) T. Tsuda, On a fundamental system of solutions of a certain hypergeometric equation, Ramanujan J. 38 (2015) 597--618. Doi: 10.1007/s11139-014-9630-3
(査読有り)

(3) T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformation, J. reine angew. Math. 690 (2014) 1--34.
Doi: 10.1515/ crelle-2012-0022
(査読有り)

(4) T. Mano and T. Tsuda, Two approximation problems by Hermite, and Schlesinger transformations, RIMS Koukyuroku Bessatsu, B47 (2014) 77--86.
(査読有り)

〔学会発表〕（計 11 件）

(1) T. Tsuda, Rational approximation and Schlesinger transformation, 離散数理モデリングセミナー，東京大学，東京都目黒区，2016 年 12 月 17 日.

(2) T. Tsuda, Hermite-Pade approximation, isomonodromic deformation and hypergeometric integral, Workshop ``Painleve Equations and Discrete Dynamics" Banff International Research Station (Banff, Canada) 3 October 2016.

(3) T. Tsuda, Painleve equation and continued fraction, Workshop ``Discrete Integrable Systems" Tsinghua Sanya International Mathematics Forum (Sanya, China) 11 April 2016.

(4) 津田 照久, Painleve 方程式と連分数, 研究会「第２回有理函数近似が繋ぐ可積分系・直交多項式・パンルヴェ方程式」，一橋大学，東京都国立市，2016 年 1 月 30 日.

(5) T. Tsuda, Painleve equation and continued fraction, ``2016 Joint Mathematics Meetings" Washington State Convention Center (Seattle, USA) 6 January 2016.

(6) T. Tsuda, Continued fraction and Painleve equation, Conference ``Differential and Difference Equations: Analytic, Arithmetic and Galoisian Approaches" Laboratoire Paul Painleve, Lille University (Lille, France) 23 October 2015.

(7) T. Tsuda, Hermite-Pade approximation, isomonodromic deformation and hypergeometric integral,
The 9th IMACS International Conference on ``Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory" Georgia University (Athens, USA) 3 April 2015.

(8) 津田照久, Continued Fraction and Painleve Equation,「琉球超超幾何セミナー」, 琉球大学, 沖縄県中頭郡西原町, 2015年2月12日.

(9) T. Tsuda, Continued fractions and Painleve equations, RIMS Workshop ``Recent developments in differential equations in the complex domain" RIMS, Kyoto University (Kyoto, Japan) 19 November 2014.

(10) 津田照久, Jacobi-Perron 算法と Painleve 方程式の行列式公式, 研究会「有理函数近似が繋ぐ可積分系・直交多項式・パンルヴェ方程式」, 一橋大学, 東京都国立市, 2014年1月31日.

(11) T. Tsuda, Two approximation problems by Hermite, and Schlesinger transformations, Workshop ``Around Sato's Theory" Tsuda College (Kodaira, Tokyo) 14 December 2013.

〔その他〕
ホームページ：
http://www.econ.hit-u.ac.jp/~tudateru/
（主要な発表論文のリスト等を掲載）

６．研究組織

(1)研究代表者

津田　照久（TSUDA TERUHISA）
一橋大学・大学院経済学研究科・准教授
研究者番号：00452730