

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 10 月 14 日現在

機関番号：23901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2015

課題番号：25870756

研究課題名(和文) Cubature 公式の構成問題とその実験計画法への応用

研究課題名(英文) Constructing cubature formula and its application to design of experiments

## 研究代表者

平尾 将剛 (HIRAO, Masatake)

愛知県立大学・情報科学部・准教授

研究者番号：90624073

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：作用素型cubature公式といった概念を導入し，その解析を行った．偶数次数の作用素型cubature公式の構成点数に関するStroud型下界の一般化に成功し，Shamsievの結果を包含する形で最小cubature公式を与えた．  
また，Hirao et al.(2011)を一般化し，有限群の軌道を基にした「コーナーベクトル法」と呼ばれる新たなcubature公式の構成法を与えたことにより，高次の多項式モデルに対して最適計画を構成できる．また，古典的デザイン等を用いたcubature公式をより少ない構成点のcubature公式に再構成する手法も与えた．

研究成果の概要(英文)：We consider a novel type of cubature formulas called operator-type cubature formulas. We give a lower bound for the number of points needed, and discuss analytic conditions for equality, together with tight illustrations for Laplacian-type cubature.  
On the other hand, we also consider constructing classical cubature problems of higher degree cases. We provides a systematic treatment of a group-theoretic approach for constructing classical cubature formulas and designs. Moreover, we give a method of reconstruction of formulas via combinatorial designs.

研究分野：数学

キーワード：cubature公式 最適計画 回転可能計画 球面上のデザイン ユークリッド空間上のデザイン 作用素型cubature公式

1. 研究開始当初の背景

(1) 数値積分法の一つである cubature 公式(立体求積公式, 求積公式)は, Gauss, Chebyshev 等の名を冠する公式が知られているように古くからその構成問題, 及びその公式を用いた応用が数値解析を筆頭に諸分野において研究されてきた。しかしながら, cubature 公式の構成問題に関しては, 被積分関数となる多項式が高次数の場合, また, 多変数の場合において, その具体的な構成法はあまり進展していない状況であった。研究開始当初の時点において, 申請者らの研究(Hirao-Sawa(2009), Bannai et al.(2010))で示した Gauss 積分や球上の Jacobi 積分などの応用上重要な積分クラスに対する cubature 公式と代数的組合せ論における多重同心球面上に配置される重み付き点集合(Euclidean design)との関係性から, 代数的組合せ論において未解決であった奇数次数に対する Euclidean design を構成するために必要な点の個数の下界を決定することに成功したこと, さらに奇数次数において球対称性をもつ幾つかの積分に対して cubature 公式を構成するために必要な点の個数の下界を改良に成功していたことが, この統合的視点での更なる cubature 公式の構成問題を研究を行う本テーマでの動機付けとなった。

(2) 球や球面を実験領域とする統計解析は, 球形構造を持つ生物の解析や地球内部及びその表面における自然現象を調査する場合などに用いられる。その際, 観測対象の特徴を上手く抽出するために, どこで・どれだけ観測を行えば良いのかを具体的に決定する方法(最適計画法)が必要とされる。

Kiefer(1961)は, 球や球面上の多項式回帰モデルに対する最適計画が, ある多重同心球面上の積分に対する cubature 公式を構成する点配置に観測点を取れば良いこと, すなわち, ある条件下での Euclidean design が最適計画となることを示唆した論文である。しかしながら, 同論文内でも述べられているように, cubature 公式の構成法が上にも挙げたようにあまり知られていないことから, 具体的な最適計画の構成法に関する研究もこれまであまり進展していない状況であった。

2. 研究の目的

本研究テーマでの目的は次の(1), (2)である。

(1) 原点を中心とする多重同心球面上の積分に対する cubature 公式の構成問題を進展させること。多重同心球面上の積分に対する cubature 公式の点の構造に

関する普遍的特徴を抽出し, 一般的な球面対称性を持つ積分に対する構成法の開発を目指す。特に少ない点の個数で構成される多重同心円上の積分に対する cubature 公式の構成法, また cubature 公式の一般化の提案をする。

(2) 多重同心球面上の cubature 公式の構成法を球及び球面上の最適計画の構成問題への応用を目指す。Hirao et al.(2011)において着目した Weyl 群(の部分群)の軌道として点を選ぶ方法を一般化し, 3次多項式モデルの最適計画法へと応用する。

3. 研究の方法

(1) 円対称性を持つ積分に対する cubature 公式, 及び円盤上を実験領域とする最適計画の構成問題は, ある多重同心円上の cubature 公式の構成問題と同等である。Moller(1979)により, cubature 公式の構成に必要な点の個数の代数的下界が示され, それを達成する cubature 公式(最小 cubature 公式)の存在問題はこれまで数多く研究されてきた。申請者はこれまでに Bannai et al.(2010)などにおいて, この2次元における最小 cubature 公式の幾何的構造及び直交多項式の零点に関する調査を行ってきた。特に Bannai et al.(2012), Hirao-Sawa(2012)で用いた多重正多角形を用いた点配置を基にした公式の構成問題を扱ってきた。一方, Shamsiev(2006)は, 通常 cubature 公式ではなく Laplace 作用素を考慮した cubature 公式に対し同様の点配置を用いて点の少ない cubature 公式の構成法を提示している。そこで我々は Shamsiev のアイデアをもとに一般次元における作用素型 cubature 公式を定義した上で, その公式を構成するために必要な点の個数の下界や構成法をこれまでの研究で得た知見を基に調査する。

(2) 申請者は B 型 Weyl 群の部分群の軌道として点を選ぶことにより, 多重同心球面上の cubature 公式の構成法を提案した。この方法を用いると低次数, 低次元における最小 cubature 公式を含む数多くの cubature 公式を構成することが可能であることを Hirao et al.(2012)において示した。そこで群の選び方や軌道の起点の選び方, そのパラメータの選択方法を改良することや, 積分の再生核に関する情報から点配置に関する幾何的性質を抽出することにより, さらに高次元, 高次数における cubature 公式の構成法を与える。

4. 研究成果

(1) 作用素型 cubature 公式という新たな

概念を提案することで、被積分関数である多項式が偶数時数における必要な点の個数に関する代数的下界を与えることに成功した。さらにそれを達成する点の少ない cubature 公式を構成することに成功した。

また、almost tight と呼ばれる構造を持つ場合や、高次数における非存在性を示すことに成功した。

(2) 有限群の起動を用いた構成法として、「コーナーベクトル法」を提案した。特に B 型 Weyl 群の場合においては、古典的デザイン理論を組み合わせた点の数をスリム化する方法も同時に与えることに成功している。それ以外の Weyl 群についてもコーナーベクトル法を用いて構成できる最適計画の多項式モデル次数の決定や、数々の構成例を提示した。さらに現在はコーナーベクトル法をさらに改良した方法も考察しており、今後の研究の進展が期待される。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

M. Hirao, T. Okuda, M. Sawa, Some remarks on cubature formulas with linear operators, 査読有, J. Math. Soc. Japan, 68(2) (2016), pp. 711-735

M. Hirao, M. Sawa, 有限既約鏡映群による最適実験計画の分類について, 査読無, Proceedings of Algebra and Computation 2013(2014), pp. 50-57

M. Hirao, M. Sawa, M. Jimbo, Constructions of  $p$ -optimal rotatable designs on the ball, 査読有, Sankhya A, 77(1), (2014), pp. 211-236

M. Hirao, M. Sawa, M. Jimbo, 最適計画の構成法とその関連した話題, 査読無, RIMS Kokyuroku 1844(2013), pp. 23-38

[学会発表](計 14 件)

澤正憲, 平尾将剛, 山本裕貴, 超八面体の辺の等分点を用いた D 最適実験計画法の構成について, 日本数学会 2016 年度年会, 2016 年 3 月 18 日, 筑波大学, つくば市天王台(茨城県)

平尾将剛, 行列式点過程を用いた球面上の準モンテカルロデザイン系列の生成について, 応用数学合同研究会, 2015 年 12 月 19 日, 龍谷大学, 大津市瀬田大江町(滋賀県)

平尾将剛, QMC design sequences generated by determinantal point processes on the sphere, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 2015 年 9 月 16 日, 京都大学数理解析研究所, 京都市

北区(京都府)

平尾将剛, Spherical designs and determinantal point processes, Workshop on Spherical Design and Numerical Analysis, 2015 年 4 月 22 日, 上海交通大学(中国)

平尾将剛, 球面上の実験計画法への行列式点過程アプローチ, 研究会集「有限幾何と組合せデザイン」, 2015 年 3 月 7 日, 東京理科大学, 東京理科大学, 新宿区神楽坂(東京都)

平尾将剛, 行列式点過程を用いた球面上の実験計画法の構築に向けて, 熊本組合せ論研究会「代数的デザイン論とその周辺」, 2015 年 1 月 9 日, 熊本大学, 中央区黒髪(熊本県)

平尾将剛, 神保雅一, 澤正憲, Characterizing optimum designs in terms of finite irreducible groups, Algebraic Combinatorics Workshop, 2014 年 11 月 28 日, University of Science and Technology of China(中国)

平尾将剛, 澤正憲, Characterizing optimum designs in terms of finite irreducible reflection groups. II, 2014 年度数学会秋季総合分科会, 2014 年 9 月 28 日, 広島大学, 東広島市鏡山(広島県)

平尾将剛, 奥田孝幸, 澤正憲, Some remarks on operator-type cubature formulas, The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications, 2014 年 8 月 26 日, 文部科学省研究交流センター, つくば市竹園(茨城県)

平尾将剛, 澤正憲, A construction of optimum designs on the ball using the orbits of finite irreducible reflection groups, Japan Conference on Graph and Combinatorics 2014, 2014 年 5 月 20 日, 日本大学, 千代田区神田駿河台(東京都)

平尾将剛, 澤正憲, Characterizing optimum designs in terms of finite irreducible reflection groups, 日本数学会年会 2014 年 3 月 16 日, 学習院大学, 豊島区目白(東京都)

平尾将剛, 澤正憲, Characterizing optimum designs in terms of finite irreducible reflection groups, 第 10 回「代数学と計算」, 2013 年 12 月 18 日, 首都大学東京, 八王子市南大沢(東京都)

平尾将剛, 澤正憲, 神保雅一,  $n$  次元球面上の最適計画の構成について, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 2013 年 9 月 27 日, 愛媛大学, 松山市道後樋又(愛媛県)

平尾将剛, 澤正憲, 球面上の統計的実験計画法と立体求積公式, 日本応用数理学会 2013 年度年会, 2013 年 9 月 9 日, ア

クロス福岡，福岡市中央区（福岡県）

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ist.aichi-pu.ac.jp/~hirao/>

## 6．研究組織

### (1)研究代表者

平尾 将剛（HIRAO, Masatake）

愛知県立大学・情報科学部・准教授

研究者番号：90624073

### (2)研究分担者

（ ）

研究者番号：

### (3)連携研究者

（ ）

研究者番号：