

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 2 日現在

機関番号：62615

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2013～2016

課題番号：25871053

研究課題名(和文) トーラス上の 4-連結グラフのハミルトン性

研究課題名(英文) The Hamiltonicity of 4-connected graphs on the torus

研究代表者

小関 健太 (Ozeki, Kenta)

国立情報学研究所・ビッグデータ数理国際研究センター・特任助教

研究者番号：10649122

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：トーラス上の 4-連結グラフのハミルトン性については、Nash-Williams と Grunbaum の予想の解決が重要な課題となっている。本研究では、この予想の解決を目指し、様々な結果を得た。例えば、「既存の証明手法である Tutte 閉路(道)を改良する」ことは研究開始時に予定していた方法の一つであるが、実際にこの改良に成功しており、それを用いていくつかの結果を得ている。また、もう一つの方法であった「グラフのタフネス」との関係に関する結果も示している。また、それ以外にも関連した構造について様々な結果を得ており、論文・講演という形で公表を行っている。

研究成果の概要(英文)：Since a well-known conjecture due to Grunbaum and Nash-Williams, the Hamiltonicity of 4-connected graphs on the torus has been attracted by many researchers. In this work, I have had attempt to solve this conjecture, and obtained several results. For example, I posed ``to improve a known method, so-called Tutte cycle (or path)'' as one of the main target in this work. In fact, I have succeeded this and obtained some results using an improved Tutte cycle. I also gave some other results on the toughness of graphs, which I also posed when this work began. I also obtained several other results, which have been presented as academic articles or talks in conferences.

研究分野：離散数学

キーワード：ハミルトン閉路 Tutte 閉路 タフネス

### 1. 研究開始当初の背景

グラフとは、頂点集合と辺集合（頂点集合の二元部分集合族）からなる構造として定義される。グラフの全ての頂点をちょうど一度ずつ通る閉路をハミルトン閉路と呼び、ちょうど一度ずつ通る道をハミルトン道と呼ぶ。グラフを平面グラフなどトポロジカルな閉曲面上のものに限ると、ハミルトン閉路等の問題は四色定理とも関わりを持つため、1956年の Tutte による「任意の 4-連結平面グラフはハミルトン閉路を持つ」という結果をはじめとした様々な研究が行われてきた。

### 2. 研究の目的

上で述べたように、閉曲面上のグラフのハミルトン性は常にグラフ理論の研究の中心の一つであった。特に、この分野では 40 年以上未解決であった「任意の 4-連結なトーラス上のグラフはハミルトン閉路を持つ」という Grunbaum と Nash-Williams の予想の解決が強く望まれている。他の閉曲面上のグラフや他の条件下でのハミルトン性など、関連する研究なども通して、この予想の解決が本研究の目的である。

### 3. 研究の方法

私は研究開始時まで「(1) 既存の証明手法である Tutte 閉路(道)の改良」と「(2) タフネスがちょうど 1 であるグラフの攻略」という、異なった 2 つの方向性で研究を行っており、予想の解決のため、それら 2 方向のさらなる改良とその融合を目指していた。

### 4. 研究成果

(1) 上の研究の目的項で述べた 2 つの方向性のうち、「(1) 既存の証明手法である Tutte 閉路(道)の改良」について実際に改良に成功しており、それをういていくつかの結果を示している。例えば、Grunbaum と Nash-Williams の予想はトーラス上のグラフについてのものであるが、それより種数が一つ少ない閉曲面である射影平面上のグラフに対して、「ハミルトン閉路が存在する」という性質よりも強いハミルトン性が成り立つことを、Tutte 閉路の議論の改良によって論文⑪ で示した。また、トーラス上のグラフに対しても、仮定を「5-連結」と強めた場合の結果も論文⑤ で示している。

(2) タフネスに関する研究も同時に行っている。ハミルトン道は最大次数が 2 以下の全域木ととらえることができるが、この意味で条件を緩和した、「最大次数が  $k$  以下の全域木」である全域  $k$ -木についても、タフネスと関連があることが指摘されており、同様の研究が盛んに行われている。この点に注目し、論文⑩ では、タフネスと次数制約のある全域木との関連についての結果を示した。

(3) Tutte 閉路(道)の改良を目指すため、閉

曲面上のグラフに限らず、もっと多様なグラフクラスに関しての Tutte 閉路の研究も行っている。特に、本研究期間中には、完全 2 部グラフ  $K_{1,3}$  を誘導部分グラフとして含まないグラフと定義される、クローフリーグラフに注目した。クローフリーグラフにおいては、「任意の 4-連結クローフリーグラフはハミルトン閉路を持つ」という、Grunbaum と Nash-Williams の予想に類似した予想が知られている。論文⑨ では、上記のハミルトン閉路に関する予想と、クローフリーグラフ上の Tutte 閉路の存在性に関する予想の同値性を示し、平面グラフとの類似性を指摘している。また、論文⑫ で類似の問題を扱っている。

(4) 閉曲面上のグラフのハミルトン性について「全頂点を通る」という性質に注目した、全域歩道に関する結果を論文⑬ で示している。この論文では、適化の分野で提唱された整数計画問題の線形緩和度に関する問題に肯定的な解決を与えている。

(5) 閉曲面に埋め込めるグラフの族は禁止マイナーによって特徴付けられるため、適当なグラフ  $H$  をマイナーとして禁止したグラフの族に注目が集まっている。論文③ では、 $H$  が完全 2 部グラフ  $K_{2,4}$  の場合に注目し、そのようなグラフを禁止マイナーとするグラフ族の特徴づけを与えている。その特徴づけによって、グラフのハミルトン性の結果も系として得られる。

(6) 閉曲面上のグラフのハミルトン性は、4 色定理の証明への試みから始まっているなど、この問題とグラフの頂点彩色性とは、深い関係があることが知られている。この点に注目し、幾何的な性質も同時に考えることで、閉曲面上のグラフの彩色性に関する結果も論文①、④、⑦ で示している。

(7) その他、閉曲面上のグラフに関しての、完全マッチング、全域木、全域 Halin 部分グラフなどの関連構造についての結果を、論文②、⑥、⑧ で得ている。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 27 件)

- ① A. Nakamoto and K. Ozeki, Coloring of locally planar graphs with one color class small, *Australasian J. Combin.* 67 (2017) 101–118, 査読有。
- ② K. Kawarabayashi, K. Ozeki and M.D. Plummer, Matching extension missing vertices and edges in triangulations of surfaces, *J. Graph Theory* 85 (2017) 249–257, 査読有。

- ③ M.N. Ellingham, E.A. Marshall, K. Ozeki and S. Tsuchiya, A characterization of  $K_{\{2,4\}}$ -minor-free graphs, SIAM J. Discrete Math. 30 (2016) 955—975, 査読有.
- ④ A. Nakamoto, K. Noguchi, and K. Ozeki, Cyclic 4-colorings of graphs on surfaces, J. Graph Theory 82 (2016) 265—278, 査読有.
- ⑤ K. Kawarabayashi and K. Ozeki, 5-connected toroidal graphs are Hamiltonian-connected, SIAM J. Discrete Math. 30 (2016) 112—140, 査読有.
- ⑥ K. Ozeki and D. Ye, Decomposing plane cubic graphs, European J. Combin. 52A (2016) 40—46, 査読有.
- ⑦ A. Nakamoto, K. Noguchi, and K. Ozeki, Extension to even triangulations, SIAM J. Discrete Math. 29 (2015) 2075—2087, 査読有.
- ⑧ G. Chen, H. Enomoto, K. Ozeki, and S. Tsuchiya, Plane triangulations without spanning Halin subgraphs : Counterexamples of Lovasz-Plummer conjecture on Halin graphs, SIAM J. Discrete Math. 29 (2015) 1423—1426, 査読有.
- ⑨ R. Cada, S. Chiba, K. Ozeki, P. Vrana and K. Yoshimoto, Equivalence of Jackson's and Thomassen's conjectures, J. Combin. Theory Ser. B 114 (2015) 124—147, 査読有.
- ⑩ K. Ozeki, A toughness condition for a spanning tree with bounded total excesses, Graphs and Combin. 31 (2015) 1679—1688, 査読有.
- ⑪ K. Kawarabayashi and K. Ozeki, 4-connected projective-planar graphs are hamiltonian-connected, J. Combin. Theory Ser. B, 112 (2015) 36—69, 査読有.
- ⑫ R. Cada, S. Chiba, K. Ozeki, and K. Yoshimoto, relationship between Thomassen's conjecture and Bondy's conjecture, SIAM J. Discrete Math. 29 (2015) 26—35, 査読有
- ⑬ K. Kawarabayashi and K. Ozeki, Spanning closed walks and TSP in 3-connected planar graphs, J. Combin. Theory Ser. B, 109 (2014) 1—33, 査読有.

[学会発表] (計 46 件)

- ① K. Ozeki, Kempe equivalence of 3-edge-colorings in cubic graphs on the projective plane, 2016 International Conference on Graph Theory, Combinatorics and

Applications, 2016/10/30, Zhejiang Normal University (China).

- ② K. Ozeki, A necessary and sufficient condition for the existence of a properly colored 2-factor, the International Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society, 2016/10/22, Seoul National University (Korea).
- ③ K. Ozeki, Hamiltonicity of graphs on surfaces, Workshop Cycles and Colourings 2015, 2015/9/7, Tatranska Strba (Slovakia).
- ④ K. Ozeki, A generalization of the  $(g, f)$ -factor theorem using set functions, ICM2014 Satellite Conference on Extremal and Structural Graph Theory, 2014/8/6, Gyeongju (Korea).
- ⑤ 小関健太, グラフのハミルトン閉路と次数を制限した全域木, 2013 年度 応用数学合同研究集会, 2013/12/20, 龍谷大学 (滋賀県瀬田市).

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :  
 発明者 :  
 権利者 :  
 種類 :  
 番号 :  
 出願年月日 :  
 国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :  
 発明者 :  
 権利者 :  
 種類 :  
 番号 :  
 取得年月日 :  
 国内外の別 :

[その他]  
 ホームページ等

個人ホームページ  
<http://tgt.ynu.ac.jp/ozeki/index.html>

Google Scholar  
[https://scholar.google.com/citations?hl=ja&user=DXzLW1AAAAAJ&sortBy=pubdate&view\\_op=list\\_works&gmla=AJsN-F7S2yhBuiQQyNUfrhqNi11NEJs\\_vcgr5nsuJEo8i41lwjpePpLLY3J1jPRK\\_nvxDm3eThbPPPIr6hGDHEXe9jU-D3Z](https://scholar.google.com/citations?hl=ja&user=DXzLW1AAAAAJ&sortBy=pubdate&view_op=list_works&gmla=AJsN-F7S2yhBuiQQyNUfrhqNi11NEJs_vcgr5nsuJEo8i41lwjpePpLLY3J1jPRK_nvxDm3eThbPPPIr6hGDHEXe9jU-D3Z)

YOAY1oKFoq3uz1k0u8JFdoP-29ozJFMUdEm-1p8  
wVFxVwYXM63bNFz4XZjxBJUMi\_fQ

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小関 健太 (OZEKI, Kenta)  
国立情報学研究所・ビッグデータ数理国際  
研究センター・特任助教  
研究者番号： 10649122

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：

### (4) 研究協力者

( )