様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　 5 月 25 日現在

機関番号：10104
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2013～2014
課題番号：25887003

研究課題名（和文）オイラー積およびディリクレ級数の解析的挙動の研究

研究課題名（英文）A study on analytic behavior of Euler products and Dirichlet series

研究代表者
赤塚　広隆（AKATSUKA, HIROTAKA）

小樽商科大学・商学部・准教授

研究者番号：30535860

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：オイラー積やディリクレ級数の挙動と、素数分布やリーマンゼータ関数の零点分布の間の関係について研究を行った。また、素数分布や零点分布と関連するようなオイラー積やディリクレ級数の挙動について、数値的な観点から研究を行った。さらに、オイラー積の漸近挙動の研究の応用として、ある種の約数関数の上極限に関する性質についても研究を行った。

研究成果の概要（英文）：We investigated relations among behavior of the Euler product/Dirichlet series, the prime numbers and the zeros of the Riemann zeta-function. We studied the behavior of the Euler product/Dirichlet series numerically. We also studied the maximal order of a certain divisor function, using the behavior of the Euler product.

研究分野：解析的整数論

キーワード：オイラー積　ディリクレ級数　素数　零点　約数関数

## １．研究開始当初の背景

ゼータ関数の零点を調べるとき、オイラー積の絶対収束域を決定することは最も基本的であり、多くの場合、容易に調べることができる。例えば、リーマンゼータ関数のオイラー積は、実部が 1 より大きいところで絶対収束することは容易に分かる。そして、その事実から、リーマンゼータ関数は実部が 1 より大のところに零点を持たないことが従う。

一方、絶対収束域の外でのオイラー積の振る舞いを調べるのは非常に難しい問題である。しかし、絶対収束域外でのオイラー積の挙動は重要な問題を含む。例えば、Birch and Swinnerton-Dyer 予想(BSD 予想)の原型は、楕円曲線のＬ関数の中心点におけるオイラー積の挙動で定式化されている。この BSD 予想の原型に対する興味から、Goldfeld、Kuo-Murty、Conrad は、楕円曲線の L 関数の中心点におけるオイラー積の挙動と、L 関数の零点分布、ある種の素数分布の関係について研究を行った。

これらの先行研究の下、研究代表者により、リーマンゼータ関数のオイラー積の絶対収束域外の各点における挙動と、零点分布、素数分布の間の関係が調べられつつあった。例えば、リーマンゼータ関数の中心点におけるオイラー積のある漸近挙動の成立は、正しいと信じられている素数定理の誤差評価と同値であることや、オイラー積の中心点における漸近挙動の成立はリーマン予想を従えることは、本研究課題の開始の時点ですでに得ていた結果である。

## ２．研究の目的

本研究の究極の目標は、オイラー積やディリクレ級数の漸近挙動や条件収束を通して、ゼータ関数の零点分布について新知見を得ることである。研究期間中における目的は、主に次の二点であった。

(1) 広く信頼されている素数分布や零点分布に関する予想と、オイラー積、ディリクレ級数に期待される条件収束や漸近挙動の関係を明らかにすること。

(2) (1)で得た期待される条件収束、漸近挙動について、数値的な観点から正否を確認すること。逆に、数値計算の結果から、零点分布の理解に繋がるようなオイラー積やディリクレ級数の性質を見出すこと。

## ３．研究の方法

上に掲げた目的を達成するため、主に次の三点から研究を進めることにした。

### (1) メビウス関数を含むディリクレ級数の条件収束

リーマンゼータ関数の逆数は、メビウス関数を係数とするディリクレ級数表示を持つ。また、メビウス関数の和に関するある不等式が成り立つと仮定すると、リーマン予想だけでなく、すべての零点が単根であることも従うことがよく知られている。特に、零点の重複度に関する情報と関連しているのは、メビウス関数独自の性質である。

以上の理由により、零点分布との関連が期待されるディリクレ級数として、メビウス関数と関連するものに注目した。そして、Gonek、Ng が予想したメビウス関数の和についての究極の不等式を仮定して、ディリクレ級数の条件収束、発散、漸近挙動の導出を試みる。逆に、得られたディリクレ級数の条件収束等を仮定し、素数分布やリーマンゼータ関数の零点分布について分かることを調べる。

### (2) オイラー積の挙動

「1．研究開始当初の背景」で述べたように、リーマンゼータ関数のオイラー積の絶対収束域外の各点における漸近挙動については、研究開始前にある程度考察は進んでいた。一方、変数の虚部を大きくしたときのオイラー積の漸近挙動については、Gonek による最近の仕事がある。しかし、これは虚部の大きさと比べ、オイラー積の長さが極めて短い場合の結果であった。

以上を踏まえ、オイラー積の長さと虚部の大きさの関係が Gonek のものとは異なる場合について、オイラー積の挙動を調べる。具体的には、零点分布や素数分布に関する適切な予想を仮定し、オイラー積の挙動の主要項を求めることや、誤差項の虚部に関する一様評価を与えることを試みる。

### (3) 数値計算

前に述べたとおり、オイラー積の中心点における漸近挙動の成立はリーマン予想を従えるものであった。このように、オイラー積やディリクレ級数に期待される漸近挙動や収束を数値的に確認することは、零点分布に関する予想を数値的に納得することにつながる。計算機代数アプリケーション PARI/GP を用いて、オイラー積やディリクレ級数の数値計算を行う。研究開始前にオイラー積の小規模な数値計算を行っていたが、規模の大きくして数値計算を行う。そして、期待される漸近挙動や収束の数値的な証拠を見つける。また、得られた数値データから、オイラー積やディリクレ級数の零点分布の理解に資する新たな性質を探す。

## ４．研究成果

リーマンゼータ関数の逆数が持つディリクレ級数、即ち、メビウス関数をディリクレ

係数とするディリクレ級数は、中心点 s=1/2 で発散することが分かった。この結果は、Odlyzko-te Riele によるメビウス関数の和の増大度に関する結果(メルテンス予想の反証)から従うものである。

一方、上の発散に関する事実は、リーマンゼータ関数の零点と結びつかない。そこで、上記ディリクレ級数に小さな修正を加えたものを考察した。修正を加えたディリクレ級数が収束すると仮定したとき、次のことが分かった。

(1) 収束値はリーマンゼータ関数の逆数を被積分関数とする積分で表される。
(2) メビウス関数の和についてある不等式が成り立つ。リーマン予想が成立し、さらにリーマンゼータ関数の零点がすべて単根となる。

さらに、修正を加えたディリクレ級数について数値実験を行い、(1)の収束値に近づくことの確からしさを数値的に観察した。また、メビウス関数の和に関する信頼に足る予想をいくつか仮定すると、ディリクレ級数が収束することを示すことができた。しかし、オイラー積の場合と異なり、メビウス関数の和とディリクレ級数の収束の間に分かり易い必要十分条件を与えることは、今後の課題として残った。

オイラー積の挙動については、変数の虚部に関する一様評価を目指した。そのために、まず、各点の漸近挙動を調べたときよりも精緻な明示公式が必要となった。そこで、各点の漸近挙動の研究で用いた総和法による方法の精密化と、ペロンの公式を基礎とする方法の二方面から、解析に耐えうる明示公式の導出を試みた。

結局、ペロンの公式を基礎とする方法を用いることにより、(1)オイラー積、(2)素数の個数と関連する関数、(3)零点を走る和、の三者を繋ぐ明示公式を得た。零点を走る和は絶対収束し、解析的に扱いやすいものになっている。また、各点の漸近挙動を調べるときに用いた明示公式は零点分布に関する条件付きの結果であったが、今回得た明示公式は無条件に成立するものである。

当初予定していた変数の虚部に関する一様評価については、上記の明示公式の導出に予定よりも時間を要したため、まとまった結果を得るには至らなかった。

オイラー積の数値計算を、素数が 10 の 10 乗まで行った。その結果、リーマン予想を従えるオイラー積の漸近挙動が概ね成立している、と納得できるデータを得た。

一方、数値計算と理論の間に乖離がある現象を見つけた。具体的には、オイラー積と漸近挙動の主要項の大小を数値的に比較した。その結果、数値的には、オイラー積よりも主要項の方が常に大きくなると見える。しかし、理論的にはリーマン予想の下、大小が無限に変化することが分かった。これは、「x 以下の素数の個数と、その主要項の大小は無限に変化する。しかし、最初に大小が入れ替わる x は非常に大きい数である。」という Littlewood と Skewes による古典的結果の類似である。今回の結果により、オイラー積の考察を行う際、数値計算からの類推には慎重さが求められることとなった。

当初の計画では予定していなかったが、ある型の約数関数の上極限について研究を行った。これは Ramanujan が 1915 年頃に研究を行い、一部は出版されたものの、残りは 20 世紀後半まで未出版となっていたものである。未出版部分は、飛躍があると思われる部分が多い。しかし、未出版部分の一部では、オイラー積の絶対収束域外での挙動を用いて、ある約数関数の上極限に関する結果を得ているように見えた。

研究開始後にこの論文の存在を知り、ある型の約数関数の上極限に関する部分に絞り、Ramanujan の原稿を検討した。その結果、本研究によるオイラー積の漸近挙動や明示公式を用いることで、飛躍があると思われる部分を埋めることができた。正確には、リーマン予想の仮定の下で、Ramanujan による上極限に関する結果を再構成することができた。

この方面の研究では、Robin と Lagarias による、リーマン予想と同値な約数関数についての初等的不等式に関する研究がある。このような、零点分布と乗法的関数の性質の関係について更なる研究を行うとき、今回の結果は新たな足がかりとなることが期待される。

研究開始前に得ていたオイラー積の挙動と素数分布、零点分布の関係に関する結果と、本研究課題の成果であるオイラー積の数値計算の部分を合わせ、一つの論文にまとめた。この論文は現在投稿中である。また、オイラー積の明示公式とある型の約数関数の上極限の研究についても、論文を準備しているところである。

## 5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　０件）

〔学会発表〕（計　４件）

(1) <u>赤塚広隆</u>，ある約数和の上極限について，2015 年 1 月 23 日，数理科学談話会，室蘭工業大学．
(2) <u>赤塚広隆</u>，Maximal orders of divisor functions，2014 年 10 月 25 日，Zeta Functions in Okinawa 2014，沖縄コンベンションセンター．
(3) <u>赤塚広隆</u>，臨界領域内におけるオイラー

積の挙動と素数分布について，2014 年 2 月 16 日，第 7 回ゼータ若手研究集会，名古屋大学．

(4) 赤塚広隆, Convergence of the Dirichlet series involving the Moebius function, 2013 年 10 月 19 日, Zeta functions in Okinawa 2013, 沖縄コンベンションセンター．

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０件）

○取得状況（計　０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.otaru-uc.ac.jp/~akatsuka/

６．研究組織
(1)研究代表者
赤塚　広隆（AKATSUKA HIROTAKA）
小樽商科大学・商学部・准教授
研究者番号：30535860

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし