

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 27 日現在

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2013～2014

課題番号：25887030

研究課題名(和文) オープンブック分解による3次元多様体のトポロジー・接触幾何・基本群の研究

研究課題名(英文) Topology, contact geometry, and fundamental group of 3-manifolds from open book decomposition

研究代表者

伊藤 哲也 (Ito, Tetsuya)

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：00710790

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,300,000円

研究成果の概要(和文)：三次元接触多様体はオープンブック分解と呼ばれる分解により、境界付き曲面の写像類群を用いて表示できる。オープンブック分解を用いることで三次元接触多様体をより位相幾何的な手法で調べる手法を発展させた。特に成果として、多様体内のovertwisted discがオープンブックの各ページと本質的に交わるよい位置に置けること、またJonesによる閉組みひもの交差数と組みひも指数との関連についての予想の一般化などが得られた。

研究成果の概要(英文)：A contact 3-manifold is presented by using the mapping class group by using an open book decomposition. By using open book decomposition we develop a method to study contact 3-manifolds in more topological way. As products, we showed that an overtwisted disc can be put in a good position so that it essentially intersects with pages of open books, and obtain a generalization of Jones' conjecture concerning the algebraic linking number and braid indices.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：三次元多様体 接触幾何 組みひも群

## 1. 研究開始当初の背景

閉三次元接触多様体はオープンブック分解と呼ばれる分解表示を持ち、閉三次元接触多様体の接触同相類のなす集合とオープンブック分解の安定同値類のなす集合が一対一に対応することが知られている (Giroux 対応)。オープンブック分解は近年の古く 1920 年代には知られていたが、近年になり三次元接触幾何の発展に伴い着目されるようになった三次元多様体の分解表示である。現在では接触構造の研究の基本的な道具として利用され、接触構造の不変量の研究や多様体上の接触構造の構成において、オープンブック分解は基本的な役割を果たすことが分かってきている。

ヒーガード分解・デーン手術・単体分割といった (位相) 三次元多様体の分解表示は、これまでに多くの研究が行われるとともに、有用な研究手法が数多く開発されている。それらの分解表示に比べ、オープンブック分解による研究手法は発展途上である。また、オープンブック分解は主に接触構造の研究に用いられることが多く、接触構造を忘れた単なる三次元多様体を調べる手段としての利用はごく限られていた。オープンブック分解による三次元多様体の構成は組みひもから結び目・絡み目を構成する手法の一般化と見ることができ、そのような観点からの研究もあまり知られていなかった。

接触構造のもつ位相幾何的な意味については、類似とされる taut 葉層構造についての理論とは異なり、tight である接触構造をもつ三次元多様体の位相的な性質については現在でも決定的な答えが得られていない。そのため、接触構造と位相幾何との関連については多くの課題が残されている。

## 2. 研究の目的

本研究では、三次元多様体のオープンブック分解と呼ばれる三次元 (接触) 多様体の分解表示を用いることにより、三次元多様体のトポロジー・幾何・基本群・接触構造を統一した観点及び手法で理解することを目標としている。

1. の研究背景で述べたように、これまでに行われてきた研究においては、オープンブック分解は接触構造を調べる方法として活用され、オープンブック分解からその位相構造を調べることはあまりされていなかった。オープンブック分解と位相構造との関連を明確にすることにより、接触構造と位相構造との関連が理解できるようになることを目標とした。

特に、研究における基本的な手法として、次項で述べる open book foliation と呼ばれる対象を調べることで接触構造や位相構造を調べる研究手法を確立・発展させることを目的として研究を進めた。

## 3. 研究の方法

オープンブック分解の構造により、三次元多様体はページと呼ばれる境界付き曲面の族と binding と呼ばれるソリッドトラスたちの和に分解される。このように三次元多様体を分解表示したとき、各ページの接平面場はオープンブック分解に対応する接触構造を近似したものであり、接平面場を適当に摂動してやることにより接触構造が復元される (Giroux 対応)。

これを踏まえて、接触構造を直接扱うのではなく、より取り扱いやすいようなページの接平面場を利用して接触構造を調べることを考えた。具体的には、多様体内の曲面について、オープンブック分解の各ページとの交差の成す葉層構造 (Open book foliation) を考え、その葉層構造を標準化し調べていくことで元の三次元接触多様体の構造を研究する。

また、open book foliation がより簡単になるように曲面を配置することにより、曲面の三次元多様体内での良い位置 (標準的な位置) を見つけることができる。それにより、三次元多様体の位相的な性質も同時に調べることができる。

Open book foliation は従来の接触構造の研究、とくに接触構造の切り張りの手法で用いられていた characteristic foliation (特性葉層構造) に比べ、定義が位相幾何的であり、曲面とページとの交差のなす葉層構造として容易に視覚化できるという利点がある。したがって、従来よりもより簡単に組み合わせ的に取り扱うことが可能になるため、接触形式などを具体的に用いること無しに、位相幾何枠組みの中で議論や定義ができるなど、接触構造をより位相幾何的な手法で調べる際に有用である。

## 4. 研究成果

主に Iowa 大学の川室圭子氏との共同研究により、3 で述べた Open book foliation の手法の基礎を構築した。特に、open book foliation が接触構造の研究で用いられる characteristic foliation の、オープンブック分解の構造を反映した特別なものであることを明らかにし、従来の理論との関連およびその違いを明確にした。これにより、

open book foliation が接触構造の情報を豊富に含むことが保証される。

また、理論構築にあたり、open book foliation の改変操作や、その基本性質、特に Fractional Dehn twist coefficient (FDTC) と呼ばれる写像類群の有理数値関数との関連を調べることにより、次に上げた一連の成果を得た。

- 一般の閉組みひもについての self-linking number 公式を証明した。これは古典的に知られた Bennequin による球面内の閉組みひもについての公式の拡張である。また、公式中に写像類群の非自明なコサイクルが現れることを確認した。これは写像類群の理論と transverse knot の理論との関連を示唆するものである。
- オープンブック分解のモノドロミーと多様体の幾何構造との一対一対応を示した。これは Thurston による写像トーラスの幾何構造とモノドロミーの Nielsen-Thurston 分類との対応をオープンブック分解に拡張するものである。
- オープンブック分解のモノドロミーおよび曲面の組みひもを用いた閉組みひもの種数の評価を与えた。特に、FDTC を用いて Thurston norm 等を部分的に評価できることが分かった。
- 位相幾何的な手法による接触構造の tight 性の議論を与えた。特に、overtwisted disc がオープンブック分解の各ページと本質的な弧として交わるように配置できることを示した。これは、overtwisted disc が位相三次元多様体の圧縮不可能曲面と類似した性質を持つことを示したものであり、接触幾何的な性質から位相幾何的な性質が導かれるという点で、接触構造と位相構造との関連を強く示唆するものである。
- 接触多様体内の overtwisted disc の明示的構成と図示を行った。オープンブック分解がいつ tight な接触構造を持つかという問題についての Honda-Kazez-Matic による予想の反例を構成した。また、non-right-veering という性質を持つオープンブック分解は overtwisted disc を持つことが知られているが、このようなオープンブック分解で表示される多様体の overtwisted disc

をより具体的に構成した。

- 一般のオープンブック分解内の閉組みひもについて、その組みひも指数と self-linking number について、Jones-Kawamuro 予想の一般化を定式化し、証明した。また、予想の一般化を調べるに当たり、安直な予想の拡張に対する反例を統一的に構成し、具体的に与えることで、証明した一般化がある意味で最良であることを明確にした。

なお、オープンブック分解は結び目の閉組みひも表示の三次元多様体への一般化と見ることができる。そのため、オープンブック分解を調べるにあたっては組みひも群や閉組みひもを調べることも重要となる。また、組みひも群や閉組みひもについて知られていることをオープンブック分解について一般化することは自然な問題意識として現れ、また、組みひもの場合を考察することにより一般のオープンブックの場合の考察の手がかりが得られることが期待できる。

この視点から、関連する話題として、組みひも群について、その線形表現や非線形な(自由群への作用)表現の研究、及び組みひも群に関連するトポロジーについても研究を行った。

特に、組みひも群の Dehornoy 順序を用いることにより、Bigelow による予想「非忠実な量子表現から得られる量子不変量は自明な結び目を区別しない」を肯定的に解決した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

Tetsuya Ito, Keiko Kawamuro,  
Open book foliation, *Geom.Topol.*  
査読有, 18 (2014) pp.1581-1634.  
DOI: 10.2140/gt.2014.18.1581

Tetsuya Ito, Keiko Kawamuro,  
Visualizing overtwisted discs in open  
books, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*  
査読有, 50 (2014) pp. 169-180.  
DOI: 10.4171/PRIMS/128

Tetsuya Ito, Keiko Kawamuro,  
Operations on open book foliations ,  
*Algebr. Geom. Topol.* 査読有,  
14 (2014) pp. 2983-3020.  
DOI: 10.2140/agt.2014.14.2983

様式 C - 19、F - 19、Z - 19 (共通)

Tetsuya Ito, Keiko Kawamuro,  
On the self-linking number of transverse  
links, 査読有, Geom.Topol.Monogr. 採録決定

Tetsuya Ito, Curve diagrams for Artin  
groups of type B, 査読有, Hokkaido J.  
Math 採録決定

Tetsuya Ito, A kernel of braid group  
representation yields a knot with trivial  
knot polynomials, 査読有, Math. Z.280  
(2015) 347-353.  
DOI:10.1007/s00209-015-1426-7

Tetsuya Ito, Keiko Kawamuro,  
Overtwisted discs in planar open books,  
査読有, Internat. J. Math., 26(2015)  
1550027 29 pages  
DOI: 10.1142/S0129167X15500275

Tetsuya Ito, Actions on the n-strand  
braid groups on the free group of rank n  
which are similar to the Artin  
representation, 査読有, Quart. J. Math.  
採録決定  
DOI:10.1093/qmath/hau033

〔学会発表〕(計6件)

伊藤哲也, Open book foliation, 2013  
年度秋季総合分科会(トポロジー分科会特別  
講演), 2013年9月26日, 愛媛大学

伊藤哲也, Overtwisted disc in planar  
open book, AMS Fall Central Sectional  
Meeting, 2013年10月20日, St. Louis(USA)

伊藤哲也, Overtwisted disc in planar  
open books, Floer and Novikov homology,  
contact topology and related topics, 2014  
年4月23日, Kavli IPMU(千葉県柏市)

伊藤哲也, Garside structure and  
Dehornoy ordering of braid groups for  
topologist, Combinatorial Link Homology  
Theories, Braids, and Contact Geometry,  
2014年8月6,7日 Warwick(USA)

伊藤哲也, Constructing isolated  
orderings, Orderable groups, 2015年9月3  
日, Cajon del Maipo (Chile).

伊藤哲也, A topological description  
of colored Alexander invariant / Low  
dimensional topology and number theoryVII,  
2015年3月27日、IMAQ innovation plaza(福  
岡県博多市)

〔図書〕(計0件)

なし

〔産業財産権〕

なし

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤哲也(ITO, Tetsuya)

京都大学数理解析研究所・助教

研究者番号: 00710790

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし