様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２７　年　　６　月　２１　日現在

機関番号：　３２６８６
研究種目：　研究活動スタート支援
研究期間：　2013～2014
課題番号：　２５８８７０４７

研究課題名（和文）量子パンルヴェ系と超幾何積分

研究課題名（英文）Quantum Painleve systems and hypergeometric integrals

研究代表者
名古屋　創（Nagoya, Hajime）

立教大学・理学部・助教

研究者番号：８０４４７３６７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は，超幾何積分と量子パンルヴェ系の関係を明らかにし，量子パンルヴェ系に対する一つの研究基盤を確立することであった．本研究では超幾何積分の系列を適切に定義することによって，その超幾何積分たちを特殊解に持つシュレディンガー方程式を導出することができ，その古典極限としてのハミルトニアン系を得た．得られた古典ハミルトニアン系は超幾何積分を特殊解に持つことも示すことができた．本研究の成果により，超幾何積分とハミルトニアン系の関係が研究開始当初よりも明らかにされた．

研究成果の概要（英文）：Our aim was to establish an understanding of a relation between hypergeometric integrals and quantum Painleve systems. In this project, we constructed Schrodinger equations from hypergeometric integrals defined appropriately. Taking classical limit of those Schrodinger equations, we obtained Hamiltonian systems admitting hypergeometric integrals as special solutions. Our result give an understanding of a relation between hypergeometric integrals and Schrodinger systems.

研究分野：　可積分系

キーワード：　超幾何積分　パンルヴェ系　共形場理論

１．研究開始当初の背景

(1) 新たな特殊関数を見出し，それについて調べようというのは 19 世紀の解析学の問題意識の一つであり， 1900 年に発表された Paul Painleve による動く分岐点を持たない２階非線形常微分方程式の分類についての結果はその一つの結実であった．この分類の中で既知の微分方程式に帰着しない新しい微分方程式は６個あり，現在パンルヴェ方程式と呼ばれていて，21 世紀の特殊関数として活発に研究されている．

(2)Fuchs 型方程式のモノドロミー保存変形を記述する方程式は Schlesinger 方程式であり，Schlesinger 方程式は Hamiltonian 系として書ける．簡単な場合に，Schlesinger 方程式を相空間の正準座標で書き直すことによって，第 6 パンルヴェ方程式が得られる(R. Fuchs, Math. Ann., 1907)．Schlesinger 方程式を相空間の正準座標で書き直した Hamiltonian 系を P 系と呼び，その正準量子化を量子パンルヴェ系と呼ぶ．古典パンルヴェ方程式は，Gauss の超幾何関数，Kummer の合流超幾何函数，Hermite-Weber 函数，Bessel 函数，Airy 函数を特殊解に持つことは以前から知られていた．量子パンルヴェ方程式と共形場理論の合流型 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の表現論的対応を与えることによって，量子パンルヴェ方程式が Gauss の超幾何関数，Kummer の合流超幾何函数，Hermite-Weber 函数，Bessel 函数，Airy 函数の積分表示の一般化を特殊解に持つことが研究代表者によって明らかにされていた(H. Nagoya, J. Math. Phys. 2011)．

(3)ソリトン階層の相似簡約により，パンルヴェ方程式の高階類似が得られることはよく知られている．ソリトン階層の一つである Drinfeld-Sokolov 階層からの相似簡約によって，藤・鈴木は第６パンルヴェ方程式の高階類似を得た (Fuji-Suzuki, Funkcial.~Ekvac., 2010)．独立に UC 階層の相似簡約により津田(Tsuda, J.~reine angew.~Math. 2012) も同じ第 6 パンルヴェ方程式の高階類似を得た．

(4)彼らにより独立に得られた Hamiltonian 系の量子化を考察し，研究代表者は超幾何積分表示解の系列を構成した(H. Nagoya, Publ. RIMS, 2013)．その証明は，超幾何積分を直接計算することによって与えられた．この計算を通じて，超幾何積分の系列を計算した結果からその超幾何積分の系列を特殊解として持つシュレディンガー方程式が得られることが見出され， さらに，得られたシュレディンガー方程式がどのようなパンルヴェ系と関係にあるかについても容易に予想が立てられていた．

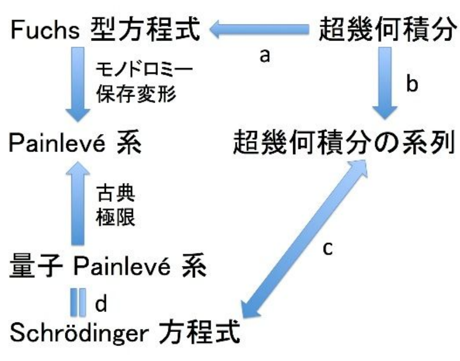
２．研究の目的

(1) 本研究では超幾何積分の系列から量子パンルヴェ系を導出し，その古典極限として古典パンルヴェ系を得る．我々の構成法は自然にパンルヴェ系と超幾何積分を結びつけ，パンルヴェ系が超幾何積分表示解を持つことの普遍的な理解を与える．量子パンルヴェ方程式と共形場理論の Knihzhnik-Zamolodchikov 方程式が関係していることからわかるように，量子パンルヴェ系は共形場理論でもあると推察されるので，本研究の成果は共形場理論や Alday-Gaiotto-Tachikawa 対応を通じて 4 次元ゲージ理論を深化させる．

(2) 上記の研究開始当初の背景及び超幾何積分とシュレディンガー方程式およびその古典極限との関係に関する着想に基づき，本研究では，適切に定義された超幾何積分から シュレディンガー方程式を計算し，超幾何積分とモノドロミー保存変形の対応を確立することが研究の目的である．より具体的には次の点について明らかにすることが目的である．

① シュレディンガー方程式計算することが望める超幾何積分の系列を定義する．
② シュレディンガー方程式を書き下すことが可能な超幾何積分を調べ，シュレディンガー方程式を書き下す．
③ 超幾何積分の系列を調べて帰納的にシュレディンガー方程式を書き下せることが可能であることを証明する．そして，超幾何積分の系列とシュレディンガー方程式の対応関係を明らかにする．
④ 超幾何積分の系列から得られるシュレディンガー方程式が量子パンルヴェ系であることを証明する．

(予想図．a,b,c,d が非自明な箇所.)



３．研究の方法

量子パンルヴェ系及びモノドロミー保存変形と超幾何積分の関係を明確に理解するために，本研究計画では以下の研究項目を予定していた．

(1) シュレディンガー方程式を計算することが望める超幾何積分の系列を定義する．

①藤・鈴木・津田による高階パンルヴェ系の量子化が特殊解として持つ超幾何積分の系列を参考にする．この超幾何積分の系列の一番目は一般超幾何級数の積分表示を用いて構成されるもので，対応する有理的ドラームコホモロジー群の基底を並べてベクトルにしたものと量子パンルヴェ系の正準座標（位置座標）を並べてベクトルにしたものの内積になっている．また，一般超幾何級数はリジッドなフックス型方程式の解であり，リジッドなフックス型方程式の解は超幾何積分を用いて表示されることが知られている．これらの超幾何積分は1 にゲージ変換とオイラー変換を交互に作用させていくことで得られるものである(Haraoka-Hamaguchi，Math. Ann. 2012)．逆に 1 にゲージ変換とオイラー変換を交互に作用させて得られる超幾何積分はリジッドなフックス型方程式の解になる．

これら二つの事実を鑑みると，超幾何積分としては1 にゲージ変換とオイラー変換を交互に作用させていくことで得られる超幾何積分を採用し，シュレディンガー方程式を得るための超幾何積分の系列を定義するためには系列の一番目を超幾何積分に対応する有理的ドラームコホモロジー群の基底を並べてできるベクトルと個数が有理的ドラームコホモロジー群の次元と同じである不定元 q たちを並べてできるベクトルの内積を取れば良いことが予想される．

②超幾何積分の系列の二番目以降を定義するためには，これも藤・鈴木・津田による高階パンルヴェ系の量子化が特殊解として持つ超幾何積分の系列を参考にして，一番目の超幾何積分のコピーをひねって定めれば良いことがわかる．ここでひねるとは単に超幾何積分を掛算するのではなく sl_nのルートに由来する結合項を加えながら積分を定めるということである．

(2) 超幾何積分の系列を計算し，シュレディンガー方程式を得る．この段階では，超幾何積分が計算できうる有理的ドラームコホモロジー群の基底を調査する．そして得られた基底を用いてシュレディンガー方程式を得る計算を行う．

(3) 超幾何積分から得られるシュレディンガー方程式が存在することの証明．
(1)①,②で得られた結果を参考にして一般の場合に超幾何積分が機能的に計算できる有理的ドラームコホモロジー群の基底を構成しその基底からシュレディンガー方程式が得られることを示す．

(4) シュレディンガー方程式が量子パンルヴェ系であることの証明．共形場理論のKZ方程式が Schlesinger 方程式の量子化と見なせることと量子パンルヴェ方程式はある表現空間 V の上の KZ 方程式をVのある(特異ベクトルが生成する)部分空間で考えたものに等しいこと(H.Nagoya，J. Math. Phys. 2012)に注意すると，①我々のシュレディンガー方程式とある表現空間の上の KZ 方程式をある部分空間で考えたものは等しいことを示し，②そのある部分空間上の KZ 方程式の古典極限はパンルヴェ系であることを示せば良い．①，② を証明することを目指す．

４．研究成果

(1)最初の研究成果として，以下のスペクトルタイプのフックス型方程式の解になる超幾何積分について、その有理的ドラームコホモロジー群の基底の候補を求めた．

① $(\mathrm{n},1^{\mathrm{n}})$，$(\mathrm{n},1^{n}),(\mathrm{n},\mathrm{n}-1,1)$
② $(\mathrm{n},1^{\mathrm{n}})$，$(\mathrm{n}-1,1^{\mathrm{n}})$，$(\mathrm{n}-1,n-1,1)$
③ (1^{n})，$(1^{\mathrm{n}}),(\mathrm{n}-2,1,1)$

次に，ゲージ変換は任意に行いオイラー変換を 2 回施してできる二重積分に対する有理的ド・ラームコホモロジー群の基底の候補を求めた．

(2) (1) の結果に基づいて超幾何積分の系列を定義し，計算することによって，それらの超幾何積分の系列を特殊解に持つシュレディンガー方程式を獲得した．さらにより一般の場合を考察するために超幾何積分をゲージ変換とオイラー変換で構成する際に常に同じ点に関するゲージ変換を施すことによって得られる超幾何積分の基底の候補を計算することができた．そしてその基底を用いて定義される超幾何積分の系列からシュレディンガー方程式を得るためのアルゴリズムを与えた．従って，今まで知られていなかった様々なオイラー型超幾何積分を特殊解として持つシュレディンガー方程式および古典極限を取ることによって得られるハミルトニアン系を得ることができた．

(3) 得られたシュレディンガー方程式がある表現空間の上の KZ 方程式をある部分空間で考えたものと等しいことは簡単な場合のみ示すことができ，一般の場合については今後の課題となった．

(4) 本研究の結果より,超幾何積分とハミルトニアン系との関係が明らかにされ，パンルヴェ系が超幾何積分を特殊解に持つ理由が明確にされた．超幾何積分の拡張を考えることで様々な応用が考えられこの点で国内外において波及効果を持つ研究結果であると思われる．今後の重要な課題は得られ

たハミルトニアン系が超幾何積分に付随するフックス型方程式のモノドロミー保存変形を記述することを証明することである.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

① Hajime Nagoya, Fractional Calculus of quantum Painleve systems of type , Contemporary Mathematics, 2015, 査読有, 印刷中

〔学会発表〕（計　2　件）

① Hajime Nagoya, Schrodinger systems from hypergeometric integrals of Euler type, Joint Mathematics Meetings, AMS Special Session on Algebraic and Analytic Aspects of Integrable Systems and Painleve Equations, 2014/1/18, Baltimore Convention Center(USA)

② Hajime Nagoya, Schrodinger systems from hypergeometric integrals I, II, Workshop on Accessory Parameters, 2013/9/19, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市)

６．研究組織
(1)研究代表者
名古屋　創（Hajime Nagoya）
立教大学・理学部数学科・助教
研究者番号：80447367