

令和元年5月31日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26247004

研究課題名(和文) Eisenstein類を核とした数論幾何的予想の解決に向けた戦略的研究

研究課題名(英文) Strategic Research using Eisenstein classes to prove Conjectures in Arithmetic Geometry

研究代表者

坂内 健一 (Bannai, Kenichi)

慶應義塾大学・理工学部(矢上)・教授

研究者番号：90343201

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 19,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、本質的に高次元の総実代数体の場合に、重要な数論幾何の対象であるポリログの研究を進めた。当初はEisenstein類と呼ばれるコホモロジー類を研究することを想定して研究を進めていたが、研究課題の途中で総実代数体に付随する代数トーラスのポリログを考えると良いことを発見し、ネコバールとショールにより提唱されたブラックティック構造の理論を考えることで、総実代数体のHecke L関数の特殊値を記述する新谷ゼータ関数の母関数を、ある種の総実代数体上のコホモロジー類として解釈することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

整数論において、総実代数体は最も基本的な有理数体、虚2次体について、最も基本的な研究対象である。また、有理数体と虚2次体の場合は対応する幾何学的対象は1次元であるが、総実代数体は高次元であることから、初めて遭遇する本質的に高次元な場合と言って良い。この場合に対して、70年代より新谷によりHecke L関数の特殊値を捉える新谷ゼータ関数とその母関数は研究されていたが、本研究では、この母関数をコホモロジー類で解釈すると、標準的な類によって与えられるという画期的な成果を得た。

研究成果の概要(英文)：Our original goal was to study the polylogarithm in the case of totally real fields. Our original goal was to study the polylogarithm via the Eisenstein class, but in course of our research, we realized the importance of a certain algebraic torus associated to a totally real field, and using the ideas from plectic structures proposed by Nekovar and Scholl, we succeeded in proving that the Shintani generating function which generates special values of Shintani zeta functions, defines a canonical class on the algebraic torus.

研究分野：数論幾何学

キーワード：代数学 整数論 数論幾何 L関数の特殊値 ポリログ

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

整数論的に重要な量  $L$  関数の特殊値の関係は、Dedekind ゼータ関数の類数公式など、整数論の分野において古くから注目されてきた。近年では BSD 予想、Deligne 予想、Beilinson 予想など、代数多様体と  $L$  関数の値の関係を予測する多くの予想が定式化された。Bloch-Beilinson-加藤予想はこれらの予想を全て包括する非常に精密な予想である。特定の代数多様体の場合にこの予想を解決するためには、この代数多様体の「整数論的な量」と「 $L$  関数の特殊値」双方の情報を持つ motivic (数論幾何的) な対象を構成する必要がある。この様な対象を具体的に構成してその性質を調べることが、この予想の解決に向けた最初の重要な目標である。Bloch-Beilinson-加藤予想の難しさは、この様な motivic な対象の一般的な構成方法が全く知られていないことに由来する。

### 2. 研究の目的

本研究では、Bloch-Beilinson-加藤予想の研究するための重要な motivic な対象として、様々な代数群に対して定義される「ポリログ」と呼ばれる motivic な対象に注目し、この対象を具体的に決定することを目指す。特に、総実代数体の Hecke  $L$  関数の場合に対応するポリログの様々な実現を具体的に決定する方法を研究目的として定めた。

### 3. 研究の方法

総実代数体に対応するのは、Hilbert モジュラー多様体上の普遍アーベル多様体に付随するポリログである。この高次元のポリログを直接記述することは難しいことから、当初計画では、過去にドイツ Regensburg 大学の G. Kings 教授行った、モジュラー曲線上の普遍楕円曲線のポリログをモジュラー曲線に引き戻して得られた Eisenstein 類を具体的に決定する方向で研究を進めていたが、Nekovar と Scholl のプレクティック構造に関する研究について考察して行くうちに、総実代数体に付随する、ある種の代数トーラスの重要性に注目し、この総実代数体の場合のポリログを具体的に決定する方向で研究を進めた。このために、プレクティック構造の理論を整備し、さらにこの場合のポリログの de Rham cohomology を決定するために、総実代数体の新谷ゼータ関数の理論の幾何学的解釈などについての研究を進めた。

### 4. 研究成果

本研究の成果として、まず Nekovar と Scholl が提唱したプレクティック Hodge 構造の基礎理論を整備することに成功した。特に、抽象的に定義される混合プレクティック Hodge 構造の圏の対象を、次元分の重みフィルトレーションとホッジ フィルトレーションを伴う加群で具体的に書けることを示した。また、この圏における Ext 群を具体的に記述することに成功した。さらに、重みフィルトレーションが 1 つしか無い場合、どのような条件を課すと本当に混合プレクティック Hodge 構造を与えるかを考察した。また、Deligne-Beilinson コホモロジーを log Dolbeault 複体を基軸とした具体的な複体で記述する研究を進めた。そして、この記述を用いて、乗法群の直積のポリログを具体的に書く研究を進めた。この場合のポリログ Hodge 実現は、1 次元の場合に現れる Bloch-Wigner-Ramakrishnan ポリログ関数を用いて表される Deligne-Beilinson コホモロジーの類であることを具体的に示した。これらの成果は論文にまとめて、学術誌へ投稿した。また、これらの研究を通して、総実代数体に付随する代数トーラスの場合のポリログが、総実代数体の Hecke  $L$  関数と関係の深い、新谷ゼータ関数の特殊値の母関数と関係する可能性を示唆する結果を得た。この結果は、この代数トーラスのポリログと総実代数体の Hecke  $L$  関数の特殊値が関係することを示唆する、重要な成果である。

### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 8 件)

数学の著者表記は、原則 ABC 順である。

- (1) Masanobu Kaneko and Shuji Yamamoto, A new integral-series identity of multiple zeta values and regularizations, *Selecta Mathematica New Series*, 2018; DOI: 10.1007/s00029-018-0400-8.
- (2) Kazuto Ota, Kato's Euler system and the Mazur-Tate refined conjecture of BSD type, *American Journal of Mathematics*, 140 (2018), no. 2, 495-542; DOI: 10.1353/ajm.2018.0012
- (3) Masataka Ono, Finite multiple zeta values associated with 2-colored rooted trees, *Journal of Number Theory* 181 (2017), 99-116; DOI: 10.1016/j.jnt.2017.05.019
- (4) Kenichi Bannai, Shinichi Kobayashi and Seidai Yasuda, The radius of convergence of the  $p$ -adic sigma function, *Math. Z.* (2017) Vol. 286: 751-781;

DOI: 10.1007/s00209-016-1783-x.

- (5) Masataka Ono and Shuji Yamamoto, Shuffle product of finite multiple polylogarithms, Manuscripta Mathematica (2016), 1-14; DOI: 10.1007/s00229-016-0856-9.
- (6) Kenichi Bannai, Hidekazu Furusho, and Shinichi Kobayashi, p-adic Eisenstein–Kronecker series for CM elliptic curves and the Kronecker limit formulas, Nagoya Math. J. 219 (2015), 269-302; DOI: 10.1215/00277630-2891995.
- (7) Shuji Yamamoto, A sum formula of multiple L-values, Int. J. Number Theory 11 (2015), 127-137; DOI: 10.1142/S1793042115500074.
- (8) Yuuki Takai, On indivisibility of relative class numbers of totally imaginary quadratic extensions and these relative Iwasawa invariants, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume 90, Number 2 (2014), 33-36.

〔学会発表〕(計 59 件)

- (1) 坂内健一, 萩原啓, 小林真一, 山田一紀, 山本修司, 安田正大, 混合プレクティックホッジ構造について、大阪大学整数論・保型形式セミナー, 大阪大学, November 24, 2017
- (2) 坂内健一, 萩原啓, 小林真一, 山田一紀, 山本修司, 安田正大, プレクティック混合ホッジ構造について、Regulators in Niseko 2017, September 6, 2017
- (3) 坂内健一, 萩原啓, 小林真一, 山田一紀, 山本修司, 安田正大, Category of mixed plectic Hodge structures, Fukuoka International Conference on Arithmetic Geometry 2017, 九州大学, April 21, 2017

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.keio.ac.jp/~bannai/>

## 6 . 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：山本 修司

ローマ字氏名：YAMAMOTO Shuji

所属研究機関名：慶應義塾大学

部局名：大学院基礎理工学研究科

職名：准教授

研究者番号 (8 桁)：20635370

研究分担者氏名：小林 真一

ローマ字氏名：KOBAYASHI Shinichi

所属研究機関名：九州大学

部局名：大学院理学研究院

職名：教授

研究者番号 (8 桁)：80362226

研究分担者氏名：安田 正大

ローマ字氏名：YASUDA Seidai

所属研究機関名：大阪大学

部局名：大学院理学研究科

職名：准教授

研究者番号（8桁）：90346065

研究分担者氏名：大坪 紀之

ローマ字氏名：OTSUBO Noriyuki

所属研究機関名：千葉大学

部局名：大学院理学研究科

職名：准教授

研究者番号（8桁）：20635370

(2)研究協力者（期間中、本研究費で雇用した研究者）

研究協力者氏名：高井 勇輝

ローマ字氏名：TAKAI Yuuki

研究協力者氏名：太田 和惟

ローマ字氏名：OTA Kazuto

研究協力者氏名：小野 雅隆

ローマ字氏名：ONO Masataka

研究協力者氏名：クラル エレン メフメット

ローマ字氏名：KIRAL Erin Mehmet

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。