

令和元年6月21日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26247006

研究課題名(和文) Floer 理論の深化と symplectic 構造の研究

研究課題名(英文) Development of Floer theory and study on symplectic structures

研究代表者

小野 薫 (ONO, Kaoru)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：20204232

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 30,800,000円

研究成果の概要(和文)：Floer 理論や擬正則写像の理論は、symplectic 幾何学の研究で強力な道具を提供し、多くの重要な成果が得られている。2014-2018年度には、Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds (共著、Asterisque 376, 2016)、Anti-symplectic involution and Floer cohomology (共著、Geometry and Topology, 21, 2017) など Floer 理論とその応用に関する研究成果を出版公表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

symplectic 構造は、古典力学のハミルトン形式に現れる幾何構造で、1980年代に研究対象としての豊かさが認識されて以来、活発な研究が続いている。その時の議論に用いられた擬正則曲線の理論であり、ハミルトン系の周期解を探すための変分法的手法は Floer 理論へと発展した。本研究では、Floer 理論の理論的側面の研究とともに、symplectic 幾何学への応用において成果を挙げた。理論物理学からの示唆に始まるミラー対称性についても、コンパクトケーラートーリック多様体と呼ばれるクラスの空間に対して Lagrangian Floer 理論を用いることで部分的ではあるが検証を行った。

研究成果の概要(英文)：Floer theory and the theory of pseudo-holomorphic curves have provided powerful tools in the study of symplectic geometry and brought many important results. During the academic years 2014-2018, the following achievements on Floer theory and its applications were made public: Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds (joint paper, Asterisque 376, 2016), Anti-symplectic involution and Floer cohomology (joint paper, Geometry and Topology, 2016).

研究分野：幾何学

キーワード：Floer 理論 擬正則曲線 symplectic 構造 Lagrange 部分多様体 A-無限大構造 トーリック多様体  
ミラー対称性 特異点

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

#### 1. 研究開始当初の背景

Floer 理論は 1980 年代半ばに A. Floer により創始されて以来 symplectic 幾何学の重要な研究手段として研究が進められてきた。研究代表者は 1990 年頃から理論の一般化や応用などを通してこの発展に関わってきた。特に、深谷氏との仮想的な基本類・基本鎖の理論による Gromov-Witten 理論の構成やハミルトン系に対する Floer 理論の構成、Oh 氏、太田氏が加わって 4 人による Lagrange 部分多様体の Floer 理論の一般論がある。理論的な進展のみならず、具体的な場面で応用して成果を得ることが上記 4 人による 2010 年頃からは行われていた。特にコンパクトトーリックケーラー多様体のラグランジュトーラスファイバーの Floer 理論が進んでいた。

#### 2. 研究の目的

Floer 理論を深化させ、それを symplectic 幾何学の研究に応用することが主な目的である。具体的には、コンパクトケーラートーリック多様体に対するホモロジー的ミラー対称性予想の検証に向け、それまでの研究を進展させる。その 1 つが深谷圏の分裂生成条件の研究であり、Abouzaid 氏の Liouville 多様体の中の完全 Lagrange 部分多様体の深谷圏の分裂生成条件の閉多様体版である。また、symplectic 構造は様々な場面で重要な役割を果たすので、symplectic 構造が陰に陽に現れる研究対象、特異点論、トーリックトポロジーなど関連研究にも関心を払って研究を進める。

#### 3. 研究の方法

これまでの研究を顧み、関連研究の進展などを取り入れて研究を進める。新たな研究の動向を知るために研究者を招聘し講演を依頼したり、研究集会を開催するなどして理解を深める。通常は代表者、分担者がそれぞれ研究を行い、必要に応じて、研究集会の折や研究機関への訪問などで情報交換や議論を行う。

#### 4. 研究成果

小野 薫は深谷氏、Oh 氏、太田氏との共同研究により、コンパクトトーリックケーラー多様体のラグランジュトーラスファイバーの Floer 理論的 potential 関数の Jacobi 環と量子コホモロジー環の間にポテンシャル関数のバルク変形下での小平・Spencer 写像による環同型が得られること、ポテンシャル関数の臨界点が全て非退化の時にその同型で pairing がどう対応するかなどについて明らかにした(下記の図書参照)。また同じ 4 人により、symplectic 形式を逆にする対合の不動点集合の Floer 理論について Floer 理論的障害類が消える条件を与え、また量子コホモロジーに量子 Massey 積を定義した(下記の文献⑥)。出版には至っていないが、バルク変形を加えたハミルトン系のスペクトル不変量やそれを用いた partial symplectic quasi-states や本質的に異なる Calabi quasi-morphisms の連続族の例などを与えた論文が掲載決定となった。

倉西構造とそれを用いた仮想的な基本類・基本鎖の理論についての詳細を述べた原稿を作成した。深谷圏の分裂生成条件の論文の原稿も準備中である。

泉屋周一は、ラグランジュ写像芽の間のラグランジュ同値は対応するグラフ型ルジャンドル開折の間のある種の幾何学的同値関係に対応する事を示し(下記の論文⑧)、ローレンツ・ミンコフスキー空間内の空間的部分多様体に対して、光錐的曲率を定義しその大域的性質を研究した。特に、空間的部分多様体がある空間的超平面(ユークリッド空間)に属している場合はこの光錐的曲率はリプシッツ・キリング曲率に一致し、得られた大域的不等式はチャーレン・ラーショフ不等式に一致することを明らかにした(下記の論文⑨)。その他にも反 de Sitter 空間内での特異点論の研究を行った。

石川剛郎は、接触多様体上のラグランジュ対の概念を新たに定義し、その一般的性質を解明し対称性具体例を考察した(下記の論文⑩)。またフロントル特異点について、一般的な枠組みを明らかにし明確な基礎付けを与え、いくつかの応用を示した(下記の論文⑪)。

柘田幹也は、凸体やそれに関わる空間のトポロジーについて次のような成果を得た。(1)  $n$ -cube の 1 つの頂点をカットした凸多面体上のトーリック多様体を分類した。副産物として、射影代数多様体の構造と非射影代数多様体の構造を併せ持つ微分可能多様体が存在することが判明した(下記の論文⑫)。(2) 3次元双曲空間において各頂点で直角となるように実現できる凸多面体(Pogorelov 多面体)上の small cover (Loebell type と呼ばれる 3次元双曲多様体)が、基本群より弱い  $\mathbb{Z}/2$  係数のコホモロジー環で区別できることを示した(下記の論文⑬)。(3) A 型の regular nilpotent Hessenberg variety のコホモロジー環の明示的な表示を与えた。またそれが、regular semisimple Hessenberg variety のコホモロジー環の対称群による不変部分環と同型であることを示した。(下記の論文⑭)

三松佳彦は、複素 3 変数の単純楕円特異点  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  それぞれの Milnor fibration を改変して得られる 5次元球面上の余次元 1 葉層構造(特に  $E_6$  から得られるものを Lawson 葉層と呼ぶ)は leafwise symplectic structure (葉向 symplectic 構造)を許容することを示した(下記の論文⑮)。また余次元が 2 以上の葉が 2次元の葉層構造の h-原理について研究し、Thurston が書いていないが与えていたと思われる証明を再現した(下記の論文⑯)。

秦泉寺雅夫は、自身の構成した擬写像のモジュライ空間をもとに開弦に対応する擬写像のモジュライ空間を構成し、B 模型に対応する交点数を定義することを研究し、開弦に対するグロモフ-ウィッテン不変量のミラー対称性による計算法を、 $\mathbb{C}P^{n-1}$  内の  $k$  次超曲面に対して一般化した(下記の論文⑰)。

松下大介は、正則 symplectic 多様体のラグランジュファイブレーションについて数々の研究をし、既約 symplectic 多様体がコンパクトなファイバーを持ち有理写像を持つとき、一般ファイバーが等しいラグランジュファイブレーションが構成できること（下記の論文㉔）や既約 symplectic 多様体  $X$  が特異点を持つときは、ラグランジュファイブレーションの底空間にも特異点が見れること、一方  $X$  が非特異であれば底空間は射影空間と同型になることなどの研究成果を得た（下記の論文㉕）。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 26 件）

- ① S. Izumiya, Caustics and Maxwell sets of world sheets in anti-de Sitter space, *Adv. Theor. Math. Phys.* 22 (2018), 709-752
- ② G. Ishikawa, Singularities of frontals, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 78, (2018)55-106
- ③ T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, and T. Sato, Hessenberg varieties and hyperplane arrangements, *J. reine angew. Math.*, DOI 10.1515/crelle-2018-0039
- ④ S. Hasui, H. Kuwata, M. Masuda and S. Park, Classification of toric manifolds over an  $n$ -cube with one vertex cut, *IMRN*, <https://doi.org/10.1093/imrn/rny161>.
- ⑤ Y. Mitsumatsu, Leafwise symplectic structures on Lawson's foliation, *J. Symplectic Geom.* 16 (2018), no. 3, 817--838.
- ⑥ K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Antisymplectic involutions and Floer cohomology, *Geometry and Topology* 21 (2017), 1-106.
- ⑦ M. Bhupal and K. Ono, Symplectic fillings of links of quotient surface singularities—corrigendum, *Nagoya Math. J.* 225 (2017), 207-212
- ⑧ K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Construction of Kuranishi structures on the moduli spaces of pseudo holomorphic disks: I, *Surveys in Differential Geometry 2017, Celebrating the 50-th anniversary of the Journal of Differential Geometry*, 133-190, *Surveys in Differential Geometry* 22, International Press.
- ⑨ H. Teramoto, K. Kondo, S. Izumiya, M. Toda and T. Komatsuzaki, Classification of Hamiltonians in neighborhoods of band crossings in terms of the theory of singularities, *J. Math. Phys.* 58 (2017), 073502-1 --073502-40
- ⑩ G. Ishikawa and S. Janeczko, Residual algebraic restrictions of differential forms, *Methods and Applications of Analysis* 24 (2017), 45-62.
- ⑪ G. Ishikawa and T. Yamashita, Singularities of tangent surfaces to generic space curves, *J. Geometry* 108 (2017), 301-318
- ⑫ V. Buchshtaber, N. Erokhovets, M. Masuda, T. Panov, S. Park, Cohomological rigidity of manifolds defined by 3-dimensional polytopes. *Russian Math. Surveys* 72 (2017), no. 2, 199–256.
- ⑬ H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi and M. Masuda, The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type  $A$ , *IMRN*, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnx275>.
- ⑭ Y. Mitsumatsu and E. Vogt, Thurston's h-principle for 2-dimensional foliations of codimension greater than one', In 'Geometry, dynamics, and foliations 2013', *Adv. Stud. Pure Math.*, 72, Math.Soc. Japan, 2017
- ⑮ D. Matsushita, On isotropic divisors on irreducible symplectic manifolds, *Higher dimensional algebraic geometry – in honor of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday*, 291-312, *Adv. Studies in Pure Math.* 74 (2017),
- ⑯ K. Ono and A. Pajitnov, On the fixed points of a Hamiltonian diffeomorphism in presence of fundamental group, In *Essays in mathematics and its applications*, 199-228, Springer Verlag, 2016
- ⑰ K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Shrinking good coordinate systems associated to Kuranishi structures, *J. Symplectic Geom.* 14 (2016), 1295-1310
- ⑱ S. Izumiya, Geometric interpretation of Lagrangian equivalence, *Canadian Mathematical Bulletin* 59 (2016), 806-812
- ⑲ D. Matsushita, On deformations of Lagrangian fibrations, In *K3 surfaces and their moduli*, 231-243, *Progr. Math.* 315, Birkhauser/Springer, 2016
- ⑳ K. Ono, Some remarks on Lagrangian tori, *J. Fixed Point Theory and Applications* 17, 2015, 221-237
- ㉑ S. Izumiya, Lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds in anti-de Sitter space, *Journal of Mathematical Physics* 56 (2015), 112502-1 --112502-29
- ㉒ G. Ishikawa and Y. Machida, Monge-Ampere systems with Lagrangian pair,

- Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 11 (2015), 081, 32 pages
- ②③ D. Matsushita, On base manifolds of Lagrangian fibrations, *Sci. China Math.* 58 (2015), 531-542
  - ②④ S. Izumiya, Total lightcone curvatures of spacelike submanifolds in Lorentz-Minkowski space, *Differential Geometry and its Applications* 34 (2014), 103-127
  - ②⑤ M. Jinzenji and M. Shimizu, Open virtual structure constants and mirror computation of open Gromov-Witten invariants of projective hypersurfaces. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 11 (2014), no. 1, 1450005, 36 pp.
  - ②⑥ D. Matsushita, On almost holomorphic Lagrangian fibrations, *Math. Ann.* 358 (2014), 565-672

[学会発表] (計 29 件)

1. Kaoru Ono, Floer-Novikov cohomology, revisited, Special Session on SYZ mirror symmetry and enumerative geometry in Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, AMS, University of Hawaii, March 2019
2. Kaoru Ono, Twisted sectors in Lagrangian Floer theory, *Differential Geometry, Geometric Analysis and PDEs*, Academia Sinica, Taiwan, October 6, 2018.
3. Kaoru Ono, Floer cohomology and covering spaces, *Symplectic Geometry Session*, Joint Interenational Meeting of American Mathematical Society and Chinese Mathematical Society, Fudan University, Shanghai, China, June 13, 2018.
4. Kaoru Ono, Lectures on Lagrangian Floer theory, National Center for Theoretical Sciences, Mathematics Division, Taipei, Taiwan, April 14, 21, 28, May 19, 26, June 2 (supplementary April 16, May 21), 2018.
5. Kaoru Ono, Anti-symplectic involution and twisted sectors in Lagrangian Floer theory, *Simons Collaboration Workshop on Homological Mirror Symmetry and Hodge theory*, CMSA, Harvard University, January 10, 2018.
6. Kaoru Ono, Anti-symplectic involution and twisted sectors in Lagrangian Floer theory, *Mirror Symmetry and Related Topics 2017*, Kyoto University, December, 2017.
7. Kaoru Ono, Twisted sectors in Lagrangian Floer theory, *Mini-workshop on Symplectic Geometry*, Universiteit Amsterdam, Netherland, October 9, 2017.
8. Kaoru Ono, Lagrangian Floer theory, *Colloquium talk at Universiteit Amsterdam*, Netherland, October 9, 2017.
9. Kaoru Ono, Twisted sectors in Lagrangian Floer theory, *Seminar on symplectic and contact geometry*, University of Cologne, October 6, 2017.
10. Kaoru Ono, Twisted sectors in Lagrangian Floer theory, the second BICMR & IBS-CGP Joint Symplectic Geometry Workshop, Beijing International Center for Mathematical Research, Beijing, China, September 21, 2017.
11. Kaoru Ono, Twisted sectors in Lagrangian Floer theory, *Holomorphic curves and symplectic topology*, Institut Mittag-Leffler, 23, May Djursholm, Sweden, August 7, 2017.
12. Kaoru Ono, Lagrangian Floer theory - around generating criterion for Fukaya category, *UK-Japan Winter School*, University College London, January 4, 2017.
13. Kaoru Ono, Generation criterion for Fukaya category and related topics (2 talks), *Workshop on mirror symmetry and related topics*, Kyoto 2016, December 12, 13, 2016.
14. Kaoru Ono, Lagrangian Floer theory - Generating criterion for Fukaya category and related topics, *Session: Symplectic Topology*, KMS-MSJ Joint Meeting 2016, Seoul National University, Seoul, Korea, October 22, 2016.
15. Kaoru Ono, Lagrangian Floer theory - Generating criterion for Fukaya category and related topics, *Yamabe Memorial Symposium Symplectic Geometry and Complex Geometry*, University of Minnesota, Minneapolis, U.S.A., October 2, 2016.
16. Kaoru Ono, Non-displaceable Lagrangian submanifolds, *Differential Geometry and Symplectic Topology Seminar*, University of Minnesota, Minneapolis, U.S.A., September 29, 2016.
17. Kaoru Ono, Floer theory and covering spaces, *Session on Low dimensional topology and symplectic geometry*, Seoul National University, June, 2016

18. Kaoru Ono, Some results on (super)heaviness for subsets in symplectic manifolds, International Conference ‘‘Gromow-Witten theory, Gauge theory and Dualities’ ’, Australian National University, Kioloa Campus, January 2016
19. Kaoru Ono, Symplectic Floer theory and its applications, Introductory minicourse Gromow-Witten theory, gauge theory and dualities, Australian National University, Canberra, Australia, January 2016
20. Kaoru Ono, Holomorphic curve technique in symplectic geometry- Lagrangian Floer theory, Conference on Geometry, Topology and Physics, NCTS, National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan, December 2015
21. Kaoru Ono, Some results on (super)heaviness for subsets in symplectic manifolds, Symplectic Geometry and Topology, Uppsala University, Uppsala, Sweden September 2015
22. Kaoru Ono, Idempotents in quantum cohomology and non-displaceable Lagrangian submanifolds, International Conference on Symplectic geometry and Mathematical Physics, Sichuan University, Chengdu, China, May 2015
23. Kaoru Ono, Mini-course on Kuranishi structures, International Conference on Symplectic Geometry and Mathematical Physics, Sichuan University, Chengdu, China, June 2015
24. Kaoru Ono, Idempotents in quantum cohomology and non-displaceable Lagrangian submanifolds, Symplectix Seminar, College de France, May 2015
25. Kaoru Ono, Minicourse on Floer theory and mirror symmetry for compact toric manifolds, Institut de mathematiques Jussieu-Paris Rive Gauche, May, 2015
26. Kaoru Ono, Lagrangian Floer theory, 95<sup>th</sup> mathematical colloquium, Charles University, Prague, Czech Republic, February 2015
27. Kaoru Ono, Non-displaceable Lagrangian submanifolds, partial symplectic quasi-states and generation criterion for Fukaya category, Mathematics inspired by string theory, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, December, 2014
28. Kaoru Ono, Floer complex and covering spaces, Mathematics New Goals, NCTS (South), National Cheng-Kung University, Taiwan, July 2014
29. Kaoru Ono, Non-displaceable Lagrangian tori in  $S^2 \times S^2$ , Okounkov bodies and applications, MFO Oberwolfach, May, 2014

〔図書〕 (計 1 件)

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds, *Asterisque* 376 (2016), vi+340 pp  
Societe Mathematique de France, ISBN: 978-2-85629-825-1

〔産業財産権〕

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：泉屋周一

ローマ字氏名：Shyuichi Izumiya

所属研究機関名：北海道大学

部局名：大学院 理学研究院

職名：教授（2014, 2015 年度）特任教授（2016, 2017 年度）名誉教授（2018 年度）  
研究者番号（8 桁）：80127422

研究分担者氏名：石川剛郎  
ローマ字氏名： Goo Ishikawa  
所属研究機関名：北海道大学  
部局名：大学院 理学研究院  
職名：教授  
研究者番号（8 桁）：50176161

研究分担者氏名：栢田幹也  
ローマ字氏名： Mikiya Masuda  
所属研究機関名：大阪市立大学  
部局名：大学院 理学研究科  
職名：教授  
研究者番号（8 桁）：00143371

研究分担者氏名：三松佳彦  
ローマ字氏名： Yoshihiko Mitsumatsu  
所属研究機関名：中央大学  
部局名：理工学部  
職名：教授  
研究者番号（8 桁）：70190725

研究分担者氏名：秦泉寺雅夫  
ローマ字氏名： Masao Jinzenji  
所属研究機関名：北海道大学  
部局名：大学院 理学研究院  
職名：准教授  
研究者番号（8 桁）：20322795

研究分担者氏名：松下大介  
ローマ字氏名： Daisuke Matsushita  
所属研究機関名：北海道大学  
部局名：大学院 理学研究院  
職名：准教授  
研究者番号（8 桁）：90333591

## (2) 研究協力者

研究協力者氏名：小川竜  
ローマ字氏名： Noboru Ogawa

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。