

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26247008

研究課題名(和文) ディリクレ形式によるマルコフ過程の確率解析とその応用

研究課題名(英文) Stochastic analysis of Markov processes by Dirichlet forms and its applications

研究代表者

竹田 雅好 (Takeda, Masayoshi)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：30179650

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 23,600,000円

研究成果の概要(和文)：一次元拡散過程の場合にはフェラーの境界分類をとおして、半群のスペクトル的性質が分かる。より一般の対称マルコフ過程に対しては、一次元拡散過程に近い性質を持つクラスの導入が大切である。そこで、レゾルベントが緊密性とよばれる性質を持つ対称マルコフ過程のクラスを定義し、一次元拡散過程の次に考察すべき対象として提案した。このクラスに属する対称マルコフ過程は、保存的な場合には一様超指数再帰性とよばれる強いエルゴード性を示し、保存的でない場合には早い爆発を表す。マルコフ半群はコンパクト作用素となり、すべての固有関数は有界連続関数になることを示した。保存的でない場合には準定常分布の存在と一意性が導かれた。

研究成果の概要(英文)：For one-dimensional diffusion processes the spectral properties of their semigroups can be studied in terms of Feller's boundary classification. It is important to introduce a class of symmetric Markov processes which possess properties similar to one-dimensional diffusion processes. In this study, we proposed such a class of symmetric Markov processes and obtain some spectral properties of them. If a symmetric Markov process in this class is conservative, it has very strong ergodicity called uniform hyper exponential recurrence. If it is not conservative, it explode very fast. By using these properties we can show that its semigroup becomes a compact operator and every eigenfunction has a bounded continuous version. Moreover, the principal eigenfunction is integrable. As its important application, the existence and uniqueness of the quasi-stationary distributions are derived for non-conservative symmetric Markov processes in this class.

研究分野：確率過程論

キーワード：対称マルコフ過程 ディリクレ形式 測度空間上の確率解析 準定常分布

1. 研究開始当初の背景

確率解析の研究において、与えられた適切なデータをもとに、連続時間パラメータの確率過程を構成し、その性質を調べることは最も基本的な問題である。ユークリッド空間の領域やリーマン多様体など可微分構造を持つ空間においては、一つの強力な手法として確率微分方程式の理論があり、既に深い理論と広汎な応用が展開されている。一方、1980年代頃から様々な物理モデルの研究を通じて、多様体上の道の空間やフラクタル集合など、局所構造が古典的なものと本質的に異なる特異な空間上に確率過程を構成し、その確率解析を行うことが注目され始めた。この場合、係数にある程度の滑らかさを必要とする確率微分方程式の理論は適用不可能になる。そのため、福島正俊により構築されたディリクレ形式による構成方法の有用性が認識されるようになった。この二つは適用範囲が異なり、それぞれ相補う理論と言える。ディリクレ形式の理論は、マルコフ性をもつ正値二次閉形式として定義され、「その定義域に十分豊富な連続関数を含む」という、確認が容易な条件のもと、対称マルコフ過程が構成される。特段の空間構造を必要としない柔軟さが大きな利点であり、この30年間に理論と応用の両面で大きな進展を遂げた。測度距離空間上の拡散過程の最適輸送理論への応用は、幾何学、偏微分方程式論を巻き込んで近年大きな進展を遂げたテーマである。飛躍型マルコフ過程の確率解析においても、ハルナックの不等式、ハーディの不等式、ポアンカレの不等式に代表される関数不等式が非局所ディリクレ形式に拡張され、飛躍型マルコフ過程の基本解の精密な評価など解析的理解が大きく進展した。それらに応用した飛躍型マルコフ過程の経路の性質、保存性・再帰性などの大域的性質に関する確率論研究の進展もみられる。

2. 研究の目的

研究の目的を簡条書きにすると、非局所ディリクレ形式に付随する内在的距離の研究と内在的距離を用いた飛躍型マルコフ過程の保存性、脱出レートの研究、滑らかな測度、特に境界測度の加藤クラス、ディンキン・クラスなどによる特徴付け、フラクタル上の拡散過程のマルチンゲール次元の決定・評価と一般の状態空間上で定義されたディリクレ形式のマルチンゲール次元の解析的特徴付け、抽象ウィナー空間上の有界変動関数の基礎理論と確率過程論への応用、非局所ディリクレ形式や無限次元空間上のディリクレ形式の拡張問題、特に、マルコフ自己共役拡大およびシルバースタイン拡張の一意性に関する十分条件、測度距離空間上のディリクレ形式に付随する最適輸送理論の確率解析への応用がある。

上記のテーマに関しては、少しの萌芽的研究が存在するものの、最近になっていくつか

の実質的な進展があった。本申請研究では、上記の研究で蓄積された成果とテクニックを踏まえ、積年の課題であったこれらの研究課題に着手する。

確率解析に関する基礎理論の整備が必要になる。非局所ディリクレ形式では、局所的にディリクレ空間に入る関数のクラスは扱い難く、確率解析の基本的な道具である福島分解は成り立たない。そのため、確率解析はディリクレ空間に入る関数をもとに行われていた。最近、分担者である桑江は、より広い関数空間に対して福島分解を拡張した。この新しく導入された関数空間まで従来の結果が拡張可能かどうかの検証を地道に行う必要がある。ディリクレ形式に適合した内在的距離はこの関数空間に含まれ、非常に一般的な対称マルコフ連鎖の保存性や無限遠点への脱出レートが、ディリクレ形式に適合した内在的距離による体積増大度で特徴づけられることが期待できる。

一般の状態空間上で定義された局所ディリクレ形式から構成される対称拡散過程の経路について、その微視的挙動を直接的に記述する理論構築に関しては、分担者、日野により考察のためのプログラムが提示されている。すなわち、通常の意味で微分構造を持たない空間においても各点における「接空間」を定義し、ランダムな粒子がその接空間に沿って運動する状況を記述する。対称拡散過程に付随する「ノイズ」の性質をより詳しく調べる。道の空間等の無限次元空間の領域において、ディリクレ形式の定義域の拡大の一意性の問題を解決し、反射壁拡散過程の挙動の記述および、適切な付帯条件の下での拡散過程の一意性を証明する。ディリクレ形式により構成される拡散過程で駆動する「確率微分方程式」の理論を展開する。以上の研究に対して、マルチンゲール次元という概念が非常に重要な役割を果たす。マルチンゲール次元なる概念は、どこまで飛躍型マルコフ過程に拡張可能か調べることは、興味深い今後の課題である。ディリクレ形式の枠組で、確率微分方程式のように局所構造が顕になる形での理論展開ができれば、従来より柔軟な解析が可能となり、この分野の発展において大きな突破口になることは間違いない。種々の無限次元空間上の確率解析の研究にもインパクトを与える。

場の量子論など数理物理に動機付けを持つ無限次元の問題が、ディリクレ形式の理論を用いた関数解析的な方法と確率論的な方法を相互に取り入れて解析されてきた。また、マリアバン解析や無限次元空間におけるラフパス理論・有界変動関数の理論とその応用についての研究が、分担者、会田、日野により研究されてきた。数理物理的な動機を持ち、マルコフ拡大の一意性・本質的自己共役性の問題、準古典近似の問題、反射壁拡散過程の解析などは、経路空間やループ空間上の解析学での重要な未解決問題として良く知ら

れたものであり、従来の技法を超えた新たな観点からの寄与をする。

最適輸送理論が確率測度空間の幾何学的土台を与えること、および、熱方程式を含む多くの偏微分方程式がこの空間上の勾配流として実現されることが解明されて以来 10 年余りの間に、最適輸送理論は幾何学や解析学、確率論の諸問題と有機的に結合しながら爆発的に発展してきた。分担者の桑田らにより、最適輸送理論によるリッチ曲率の下限の定式化、確率測度の空間上の標準的なマルコフ過程である Wasserstein 過程の構成などと関連して、無限次元空間である確率測度の空間の特性が盛んに研究されている。特異空間上のディリクレ形式や調和写像の解析、拡散過程の結合法などにおいて、最適輸送理論の確率解析への応用を目指す。

### 3. 研究の方法

連続な経路を持つ拡散過程の場合と比べて、飛躍型 Markov 過程の経路はより複雑で多様なため、その困難克服に飛躍型熱核評価や擬微分作用素などの解析手法を組み合わせ多角的な解析を展開する必要がある。上村は、本テーマの専門家 R. Schilling(ドレスデン工科大)と既に共同研究を進めており([ref{SU}]), 引き続き密接に研究連絡を取った。

マルコフ過程論の変換論の一つであるランダムな時間変更の理論が極めて有効に機能する事が判明しつつある。またディリクレ形式の変分公式、いわゆるドンスカー・パラダーンの  $\Gamma$ -関数とディリクレ形式の同定は、緊密性を持つマルコフ過程の基底の存在に関する一般的な定理を導くことが分かるなど、本テーマに関しては竹田、桑江による結果が蓄積されている。基底の存在は、平衡測度や準平衡分布の存在を導き、幅広い応用の可能性がある。一方、マルコフ半群の超縮小性は平衡測度や準平衡分布の一意性を導き、さらに超縮小性は対数ソボレフの不等式と密接に関連する。これらを踏まえて、応用範囲の拡大を図るため、会田、塩沢を加えて研究連絡を密にとった。

ランダム媒質で定式化される数学モデルでの主題となる局在化および準安定性に対し、熱核評価や大偏差原理に関連するポテンシャル論的方法を利用した、新たな道筋の構築を目指す。本課題に関しては連携研究者の熊谷が精力的に研究を進めており、塩沢、梶野らが担当した。

対称マルコフ過程の乗法汎関数による変換論、飛躍過程の無限遠点への脱出レートの特長などに関して、非局所ディリクレ形式における内在距離の興味深い応用例が最近得られている。桑江は、Z. Q. Chen(ワシントン大)、P. Fitzsimmons(カリフォルニア大)と一般のディリクレ形式に付随する確率解析の構築にあたった。また桑江、塩沢は、グラフ上の連続時間マルコフ連鎖の保存性

や脱出レートについての内在距離を用いた解析で、A. Grigor'yan(ビーレフェルト大)、D. Lenz(イェーナ大)、正宗(東北大)と研究連絡を取っている。彼らとの研究交流をおこなった。

### 4. 研究成果

対称マルコフ過程に対して、既約性、強フェラー性、緊密性なる三つの性質をもつクラス(クラス(T))を導入し、その性質を調べた。特に、そのクラスに属するマルコフ過程が生成する半群はコンパクト作用素となり、全ての固有関数がある界連続となることが示せた。さらに保存性を仮定すると、非常に強いエルゴード性、すなわちコンパクト集合の補集合からの脱出時刻が指数可積分性をもつことが示せ、この事実を用いて初期値に関する一様なドンスカー・ヴァラダーン型大偏差原理の成立を証明した。

吸収壁マルコフ過程がクラス(T)に属する条件を確認した。条件が確認される場合には、半群のコンパクト性、特に基底の存在が分かり、基底を用いた  $h$ -変換によって構成される対称マルコフ過程は、クラス(T)に属する保存的な対称マルコフ過程になることが確認できる。そこで一様なドンスカー・ヴァラダーン型大偏差原理を応用することで、局所一様なドンスカー・ヴァラダーン型大偏差原理の下からの評価を、吸収壁マルコフ過程に対して示した。クラス(T)に属する保存的でない対称マルコフ過程に対しては、準定常分布の存在と一意性を示した。さらに基底が可積分であることも示せ、準定常分布を具体的に与えることができ、マルコフ半群の内在的超縮小性を仮定するとヤグロム極限になっていることが示せた。例えば、有界領域上の吸収壁対称安定過程に対しては常にヤグロム極限の存在と一意性が示せ、無限の測度をもつ領域でも存在と一意性が示せる例を見つけた。

マルコフ作用素にポテンシャルを加えてできるシュレディンガー型作用素のグリーン関数に関するポテンシャルに対して、最大値原理、連続性原理、エネルギー原理などマルコフ核のポテンシャルの持つ性質が保たれるための条件を与えた。

以上の結果は、マルコフ半群の  $L_p$  独立性をもとに、連続加法汎関数に対して竹田がえた結果であるが、最近桑江は、金大弘との共同研究で、飛躍をもつ加法汎関数やエネルギー零の汎関数にまで拡張した。

会田は、回転対称負曲率多様体上のループ空間で定義されたディリクレ形式のスペクトルギャップの漸近挙動を、パスのエネルギー関数のヘッシアンを用いて決定した。また、反射壁の項と最大値過程のドリフト項が含まれる一次元確率微分方程式の多次元版を考察し、サポート定理を証明した。

日野は、状態空間に特段の構造を仮定しない場合における強局所正則ディリクレ形式

に付随した指数の定量評価の問題に取り組み、適当な付加条件の下で指数がスペクトル次元以下となることを証明した。また、Erdos--Renyi グラフ過程を高次元化したランダム単体複体過程について、パーシステントホモロジーの文脈における生存時間と漸近挙動を考察し、平岡--白井による先行研究の結果を金澤秀との共同研究で改良した。

上村は、大倉弘之との共同研究で、一般の測度付き距離空間上で定義された対称な正則ディリクレ形式に対応する容量不等式の詳しい評価を、飛躍率と基礎の測度を用いて導出した。また、その副産物として対応する純飛躍型のマルコフ過程の再帰性条件を、容量不等式評価を用いて行なった。また、Liping Li と Jiangang Ying との共同研究で、一次元対称拡散過程に対応するディリクレ形式の正則部分空間のクラスを特徴づけ、そのクラスに属するディリクレ形式列の Mosco 収束を示した。また、大島洋一との共同研究で、半ディリクレ形式を含む一般のディリクレ形式から生成されるマルコフ過程の保存性について、拡散係数・飛躍率・球の基礎の測度による増大度を用いて条件づけた。

桑江は、ファイマン・カツ汎関数の計測性の特徴づけについて、その条件の精密化を行なった。また対称マルコフ過程のレゾルベント・フェラー性の確率論的変換による安定性について示した。マルコフ過程の反転作用を用いたディリクレ形式に付随する確率解析の理論を構築した。Xiangdong Li との共同研究では、重み付きリーマン多様体に付随する  $m$ -Bakry-Emery リッチテンソルの  $m < 1$  の場合におけるラプラシアンと比較定理と、それにもなう種々の幾何学的性質を得た。また、Z.Q.Chen と金大弘との共同研究では、ファイマン・カツ半群のスペクトル半径の  $L^p$ -独立性について、全測度有限の条件を外して超縮小性の条件だけで成立することを示した。

桑田は、相対エントロピーの差を加味した熱分布間の最適輸送距離の評価が、曲率次元条件を特徴づけるものであることを測度距離空間の枠組みで示した。また、ペレルマンの  $W$ -エントロピー汎関数の単調性における剛性定理の有限次元非負曲率の測度距離空間上への拡張について、証明の大枠を得た。RCD 空間上の確率解析、幾何解析として、無限次元スペクトルギャップ不等式の剛性定理、 $W$ -エントロピーの熱分布に沿った単調性の剛性定理、ブラウン運動の動径過程の解析等の研究について、細部を整理し、また広いクラスの劣リーマン多様体上で、一般化された曲率次元条件の一般化に基づく幾何解析を展開した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者に

は下線)

(雑誌論文)(計 15 件)

1 日野正訓, 松浦浩平, An integrated version of Varadhan's Asymptotics for lower-order perturbations of strong local Dirichlet forms, Potential Analysis, 査読有 48 (2018), 257-300. DOI: 10.1007/s11118-017-9634-x

2 金大弘, 桑江一洋, General analytic characterization of gaugeability for Feynman-Kac functionals, Math. Ann. 査読有 370(2018), 1-37. DOI: 10.1007/s00208-017-1516-4

3 竹田雅好, 田原喜広, 土田兼治, Compactness of Markov and Schrödinger semi-groups: A probabilistic approach, Osaka J. Math. 査読有 54, (2017), 517-532

4 金大弘, 桑江一洋, Analytic characterizations of gaugeability for Feynman-Kac functionals, Trans. Amer. Math. Soc. 査読有 369 (2017), 4545-4596. DOI: 10.1090/tran/6702

5 大島洋一, 上村稔大, On the conservativeness of some Markov processes, Potential Analysis, 査読有 46 (2017), 609-645. DOI: 10.1007/s11118-016-9596-4

6 竹田雅好, 和田正樹, Large time asymptotics of Feynman-Kac functionals for symmetric stable processes, Math. Nachr. 査読有 289 (2016), 2069-2082. DOI: 10.1002/mana.201500136

7 竹田雅好, Criticality for Schrödinger type operators based on recurrent symmetric stable processes, Trans. Amer. Math. Soc. 査読有 368 (2016), 149-167. DOI: 10.1090/tran/6319

8 会田茂樹, Reflected rough differential equations, Stochastic Processes and their Applications, 査読有 125, (2015), 3570-3595. DOI: 10.1016/j.spa.2015.03.008

9 会田茂樹, Asymptotics of spectral gaps on loop spaces over a class of Riemannian manifolds, J. Funct. Anal. 269(2015), 3714-3764. DOI: 10.1016/j.jfa.2015.09.023

10 Erbar, M., 桑田和正, Sturm, K.T., On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner's inequality on metric measure spaces, Inventiones Math. 査読有 201(2015), 993-1071. DOI: 10.1007/s00222-014-0563-7

11 桑田和正, Space-time Wasserstein controls and Bakry-Ledoux type gradient estimates, 査読有 54(2015), 127-161. DOI: 10.1007/s00526-014-0781-2

12 大倉弘之, 上村稔大, On the recurrence of symmetric jump processes, Forum Math. 査読有 27, (2015), 3269-3300. DOI:

10.1515/forum-2013-0190

13 竹田雅好, Criticality and subcriticality of generalized Schrodinger forms, Illinois J. Math. 査読有 58, (2014), 251-277.

14 竹田雅好, A variational formula for Dirichlet forms and existence of ground states, J. Funct. Anal. 査読有 266, (2014), 600-675. DOI:10.1016/j.jfa.2013.10.024

15 日野正訓, Geodesic distances and intrinsic distances on some fractal sets, Pub. Res. Inst. Math. Sci. 査読有 50(2014), 181-205. DOI:10.4171/PRIMS/129

[学会発表](計 27 件)

1 竹田雅好, Spectral Properties of Symmetric Markov Processes with Tightness Property, 研究集会「Metrics and Measures」, 2018年1月12日, 東北大学理学研究科, (宮城県・仙台), 招待講演

2 竹田雅好, 緊密性をもつ対称マルコフ過程の性質, 日本数学会, 2018年3月18日, 東京大学数理研究科, 東京, 招待講演

3 会田茂樹, Rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms,

Workshop on Mathematical finance and related issues,

2018年3月13日, 大阪大学中之島センター(大阪府・大阪市), 招待講演

4 会田茂樹, Asymptotics of spectral gaps on loop spaces,

Metric Measure spaces and Ricci curvature, 2017年9月4日, マックスプランク研究所, ボン(ドイツ), 招待講演

5 日野正訓, Asymptotic behavior of lifetime sums for random simplicial complex processes, Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis,

2017年9月5日, カイザーズラウテルン(ドイツ), 招待講演

6 日野正訓, ランダム複体過程における生存時間積の漸近挙動, ディリクレ形式と対称マルコフ過程 2017年9月5日, 東北大学(宮城県・仙台市)

7 上村稔大, Gamma-convergence of symmetric jump-type Dirichlet forms, Workshop on Jump Processes and Stochastic Analysis,

2017年9月1日, ドレスデン(ドイツ), 招待講演

8 上村稔大, On the conservativeness of some Markov processes, Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis, 2017年9月4日, カイザーズラウテルン(ドイツ), 招待講演

9 桑田和正, Rigidity for the spectral gap on RCD  $(K, \infty)$  spaces, 39th conference on stochastic processes and their applications, 2017年7月24日,

モスクワ(ロシア), 招待講演

10 桑田和正, Monotonicity and rigidity of the W-entropy on RCD  $(0, N)$  spaces, 23rd Nevanlinna Colloquium, 2017年6月15日, チューリッヒ(スイス), 招待講演

11 桑江一洋, Radial processes on RCD $^*(K, N)$ -spaces, GeoProba2017 in Luxembourg, 2017年7月12日, ルクセンブルグ(ルクセンブルグ), 招待講演

12 桑江一洋, Radial processes on RCD $^*(K, N)$ -spaces, Intense Activity Period Metric Measure Spaces and Ricci Curvature, 2017年9月12日,

ボン(ドイツ), 招待講演

13 桑江一洋, Liouville property for harmonic maps between metric spaces, 仙台における偏微分方程式ワークショップ, 2016年5月27日, 東北大学理学研究科数学教室川井ホール

(宮城県・仙台市), 招待講演

14 桑江一洋, Lp-independence of spectral radius for generalized Feynman-Kac semigroups, マルコフ過程とその周辺, 2017年1月6日, とくぎんトモニプラザ(徳島県・徳島市)

, 招待講演

15 竹田雅好, Spectral properties of symmetric Markov processes with tightness property, International

Conference, Stochastic Partial Differential Equations and Related Fields, 2016年10月11日, ビーレフェルト(ドイツ), 招待講演

16 竹田雅好, Criticality and Subcriticality for Positive Schrödinger Forms, 国際研究集会「Dirichlet forms and their geometry」, 2017年3月22日, 東北大学情報工学研究科, (宮城県・仙台), 招待講演

17 竹田雅好, Criticality and Subcriticality of Generalized Schrodinger Forms, Conference ``Dirichlet Forms and Applications, 2014年10月20日, オーベルバッハ(ドイツ), 招待講演

18 会田茂樹, On solutions to reflected rough differential equations, Stochastic Analysis, 2015年9月8日, 京都大学理学研究科, (京都府・京都市), 招待講演

19 会田茂樹, Asymptotics of spectral gaps on loop spaces over a class of Riemannian manifolds, 確率論と幾何学, 2015年11月10日,

東京工業大学(東京都目黒区), 招待講演

20 日野正訓, On the distribution of energy measures on Sierpinski gasket type fractals,

International Conference on Stochastic Analysis and Related Topics, 2015年8月5日, ウーハン(中国), 招待講演

21 日野正訓, On distribution of energy measures on the Sierpinski gasket, 研究集会「確率論と幾何学」, 2015年1月10日, 東京工業大学(東京都目黒区), 招待講演

22 桑江一洋, Analytic characterization of gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals and its applications,

Stochastic Analysis and Applications, 2015年9月1日, 東北大学片平キャンパス さくらホール(宮城県・仙台), 招待講演

23 桑江一洋, Liouville property for harmonic maps between metric spaces, 福岡大学微分幾何研究会, 2015年11月1日, 福岡大学セミナーハウス(福岡県・福岡市), 招待講演

24 桑田和正, 最適輸送理論, リーマンの曲率次元条件と熱分布, 第62回幾何学シンポジウム, 2015年8月29日, 東京理科大学(東京都新宿区),

招待講演

25 桑田和正, A dimensional Wasserstein contraction characterizing the curvature-dimension condition, Stochastic Analysis and Applications

2015年8月31日, 東北大学(宮城県仙台市), 招待講演

26 上村稔大, On the Mosco convergence of symmetric jump type Dirichlet forms, The 11th Workshop on Markov Processes and Related Topics,

2015年6月28日, 上海交通大学, 上海市(中国), 招待講演

27 上村稔大, A note on the Mosco convergence of symmetric Dirichlet forms, Workshop on Stochastic Analysis and Related Topics

2015年11月5日, ドレスデン工科大学, ドレスデン(ドイツ), 招待講演

〔図書〕(計1件)

桑江一洋, 塩谷隆, 太田慎一, 高津飛鳥, 桑田和正, 最適輸送理論とリッチ局率, 数学メモリアル, 日本数学会, 2017年, 141

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹田雅好 (TAKEDA, MASAYOSHI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 30179650

(2) 研究分担者

会田茂樹 (AIDA, SHIGEKI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 90222455

上村稔大 (UEMURA, TOSHIHIRO)

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号: 30285332

桑田和正 (KUWADA, KAZUMASA)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 30432032

日野正訓 (HINO, MASANORI)

京都大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 40303888

桑江一洋 (KUWE, KAZUHIRO)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号: 80243814

(3) 連携研究者

河備 浩司 (KAWABI, KOUJI)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号: 80432904

塩沢 裕一 (KAWABI, KOUJI)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 60454518

楠岡 誠一郎 (KUSUOKA, SEIICHIRO)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号: 20646814

梶野 直孝 (KAJINO, NAOTAKA)

神戸大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 90700352

(4) 研究協力者( )