

令和元年6月13日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2014～2018

課題番号：26287001

研究課題名（和文）頂点作用素代数の研究と軌道理論の応用

研究課題名（英文）Research of vertex operator algebras and application of orbifold theory

研究代表者

宮本 雅彦（MIYAMOTO, MASAHIKO）

筑波大学・数理物質系（名誉教授）・名誉教授

研究者番号：30125356

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 11,600,000円

研究成果の概要（和文）：この研究課題を通じた一連の研究により、40年前から考えられていた共形場理論における軌道理論の有限性に関する予想を完全に解決した。すなわち、共形場理論が有限性を持つなら、その有限対称性による固定空間もまた有限性を持つことが分かった。共形場理論の構成においては、軌道理論は重要な方法の一つであり、有限性を個別に証明していたが、これらの確認が不要となったわけである。この結果を応用して、日本・台湾グループが行っていた71構成問題はすべて構成できた。また、有限群が頂点作用素代数に作用する場合には、この結果により、軌道理論の加群の表現論も利用でき、群の表現論以上に強力な手法を手に入れたことになる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

71構成問題などの証明で基本となったように、軌道理論を利用して新しい共形場理論の構成する方法は、共形場理論や頂点作用素代数の研究において非常に重要な方法の一つである。これまでは、それら新しい頂点作用素代数の表現が有限性を示すことを確認することが大きな問題であったが、この研究により得られた成果として、そのような計算が今後不要となり、この分野の研究発展に大きく貢献する。また、有限群の研究に対しても、有限群が作用する頂点作用素代数を考えることにより、軌道理論のすべての表現を利用することができ、群のこれまでの表現論以上に強力な手法を手に入れたことになる。この波及効果は大いに期待できる。

研究成果の概要（英文）：Throughout this research, we have completely proved the classical conjecture on the finiteness property of orbifold theories of 2-dimensional conformal field theory. Namely, if a conformal field theory has only finitely many simple modules, then the theory (the orbifold theory) consisting of fixed observations by a finite group of symmetries also has only finitely many simple modules. In the construction of new conformal field theory, the orbifold theory construction is one of the most important constructions. Until our result, they have to prove the finiteness properties with a long calculation. We have also got a powerful method to study the property of finite automorphism groups acting on vertex operator algebras.

研究分野：代数

キーワード：頂点作用素代数 自己同型群 単純群 モンスター単純群 ムーンシャイン 軌道理論 C2有限性 共形場理論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

頂点作用素代数は最大の散在型有限単純群であるモンスター単純群に纏わる神秘を解き明かすために、ポーチャーズによって導入された無限次元の代数であるが、同時に現代では、物理における2次元共形場理論を数学的かつ代数的に取り扱ったものと理解されている。個々の頂点作用素代数が一つの場の理論を実現しているわけであり、その構成は非常に難しい問題である。現時点では、構成の基礎となる頂点作用素代数で、無限系列を持つものとしては、格子を利用した格子頂点代数かフェルミオン超頂点作用素代数、またはリー超代数を利用したアフィン超頂点代数がほとんどであり、多くの場合、それらを変形して W 代数などの新しい超頂点作用素代数を作るのが一般的であった。また、その方法なども、部分頂点作用素代数を見つけるか、ある部分頂点作用素代数のコミュタント、またはスクリーニング作用等を利用して、その核やその剰余代数として構成しているにすぎない状態であった。また、単純に大きくする方法としてもシンプルカレント構成以外には余り見つかっていなかった。特に、有名なムーンシャイン頂点作用素代数のようなホロモルフィックと呼ばれる既約加群が一つしかないものの構成は大きな問題の一つとなっていた。これは、24次元のホロモルフィック頂点作用素代数は71個しかないのではないかと物理学者による古典的な予想があるが、研究開始直前の時期の数年前まで存在が知られていたのは高々40数個であったが、研究開始直前の時期に、研究代表者による初の奇数位数自己同型による構成など、かなりの例が見つかってきており、そのような頂点作用素代数を全部構成できるのではないかと期待が高まっていた。その基本的な構成方法の一つが軌道理論である。これは既知の頂点作用素代数とその自己同型群を使って、新しい頂点作用素代数を構成する方法であるが、これらの構成が可能となるのは、自己同型による固定部分代数が C_2 有限性を満たすことが必要であり、研究開始当初では個別に対応しているのが現状であった。

2. 研究の目的

本研究では、研究開始直前の5, 6年の間に日本・台湾グループを中心として発表された「マックイ予想の解説」、「フレイム頂点作用素代数の完全分類」、「多数の新ホロモルフィック頂点作用素代数の構成」、「巡回型軌道理論の有限性証明」などの大きな進展を、さらに発展させて確定的なものにし、世界に還元することを目指す。その為に、この分野でリードしている日本での研究を積極的に支援し、その成果を基に、海外の研究者達と継続した研究集会を開催し、密接に連携していくことを目指す。まずは、海外との研究者との協働を目指す継続的な国際研究集会の開催を目指す。研究面では、目的(1)として、24次元ホロモルフィック共形場理論の完全分類を目指している日本台湾グループへの支援と、その基礎となる軌道理論すべての場合の有限性の証明を初めとする基礎理論の構築を目指す。目的(2)としては、グライス代数を初めとしたウェイト2の空間の代数構造の考察、特にイジング元の振る舞いの研究を群論的立場から行う。目的(3)として、幾何構造から定義されたマシュームーンシャインやコンウェイムーンシャイン予想などを実際の頂点作用素代数の加群上のトレイス関数やモジュラー形式そしてヤコビ形式などの保型関数との関係を調べる事を計画している。さらに、余裕があれば、目的(4)として、ムーンシャイン現象にまつわる鏡映群およびコクスター群の研究を開始する。研究代表者が行った研究結果の中で注目しているものとして、26点-diagramの研究がある。これは、モンスター単純群の Z_2 による環積(パイモンスターと呼ばれる有限群)が26個の自然な関係式を満たす鏡映から生成されている(26個の元によるコクスター群を簡単な関係式で剰余するとパイモンスターになる)という不思議な現象は知られていたが、この26個の点に対して色々な自己同型を与えても、ある種不思議な現象が起きているというものである。この現象と頂点作用素代数の自己同型との関連は極めて興味深い。特に、フィールズ賞受賞者 Borcherds も指摘しているように、何かしらの関係が隠れていると思われる。本研究でその現象に隠された本質を見つけるための議論を進めるのが後半の目的の一つとする。

3. 研究の方法

すでに進行している国際研究集会の開催と並行して、目的(1)に関しては、まずはモンタギューが提案したウェイト1の空間のなすリー代数の自己同型が真に頂点作用素代数の自己同型となるかを検証することが最初の仕事であり、リー代数グループおよび格子の自己同型群を研究しているグループと一緒に、研究代表者およびラム教授(台湾中央研究院)や山内氏(東京女子大)達との勉強会を開催して確認していく。また、軌道理論における自己同型群や、マシュームーンシャイン予想、コンウェイ予想などに出てくる有限群論的

な部分に関しては、千吉良氏（熊本大）にも参加してもらい研究を進める。特に、頂点作用素代数の立場からこの研究をリードしているラム教授（台湾中央研究院）にはこの時期複数回来日してもらい、交流を深め、多くの議論に加わってもらう。目的(2)に関しては、イワノフ教授（Imperial College London）のグループが行っている方法と比較して、頂点作用素代数のグライス代数を研究している山内（東京女子大）-ラム教授達の方法は、中心電荷 $1/2$ のイジング元だけではなく、他の極小系列の共形元等も使うことができるので、非常に優位であると判断していた。実際、研究会などでも、イワノフグループの結果の上を行く成果を発表している。この点を踏まえ、この分野の更なる発展を与えるための基礎理論を構築する。特に、この研究を支援する方法として、共形元が分解した場合の trace 関数に関するモジュラー不変性を調べることが重要であると考えており、目的(3)とつながる。目的(3)に関しては、筑波大学に滞在していた Mathew Krauel 氏と共同研究を行っており、log 型の交絡作用素に対するトレース関数の保型性の証明を目指す。また、室蘭工業大学の桂田氏などの保形形式の研究者の指導を仰ぐ予定である。

上記の目的(1),(2),(3)に対応した研究を続けると同時に、台湾（ラム教授主催）で開催する研究会に日本から 5,6 名程度の参加を見込んでいる。多分、いくつかの新しいホロモルフィック頂点作用素代数が構成できているので、その発表を聞くことが出来ると考えている。欲を言えば、目的(1)に関しては、本研究計画が終了するまでに、71 個のすべてが構成できたという報告を受けたいと期待しており、それが可能ではないかとも考えている。それ以外にも、近年は院生の成長が著しいので、2,3 名程度研究会での発表を毎年援助する予定である。また、国内においては、これらの国際研究会で情報交換した結果を踏まえ、頂点作用素代数研究者、群論研究者、代数的組合せ論研究者とリー代数の表現論研究者が中心となってセミナーを東北大学、および関東の大学が中心となって開催する予定である。多分後半には、目的(4)以外の 3 つのテーマに関して大きく発展していることが期待でき、しかもそれにより、かなり強力が手法を手に入れているので、(3)のグライス代数の部分代数の分類などが目的(4)に応用できるものと考えている。国際研究会の詳細な計画は、未定ではあるが、台湾で研究会を開催する順番であり、ラム教授は承諾しているので、国内においてもそれに向けた準備を行う予定である。また、本研究の最終年度として、それまでに進展した研究や得られた結果を、頂点作用素代数の研究会だけではなく、リー代数関係や組合せ論関係の多くの海外研究会で発表していく予定である。

4. 研究成果

新しい頂点作用素代数の構成とその性質を調べる上で重要と述べた基礎的研究に対して、この研究課題を通した一連の研究により、40 年前から考えられていた共形場理論における軌道理論の有限性に関する予想が完全に解決した [1], [2]。すなわち、基礎の共形場理論の既約表現の可能性が有限なら、その有限対称性による固定空間もまた既約表現の可能性は有限となる。この結果は、表現論で非常に強力な軌道理論の既約表現同士のフュージョン積が問題なく構成できることを意味し、シンプルカレント拡張なども問題なく構成できることを意味している。またトレース関数等のモジュラー不変性も成り立つので、グローバル次元なども計算でき軌道理論を利用した研究に大きく貢献する。実際、新しい共形場理論の構成においては、軌道理論は重要な方法の一つであり、有限性を確認することが重要な問題であった。これまでは個々の場合に膨大な計算をして証明していたが、この結果により、そのような計算が不要になった。実際に、この研究計画でも支援することを目的とした 71 構成問題においても、最近のすべての構成は軌道理論を利用して行われており、頂点作用素代数や共形場理論の構成において非常に重要な方法であることがわかる。これにより、この分野の研究発展に大きく貢献する結果であることがわかる。また、有限群が頂点作用素代数に作用する場合には、この結果により、有限型頂点作用素代数の表現論が利用できる。このような設定では、通常の群の表現は出発点の頂点作用素代数の内部で実現できるが、さらに軌道理論の表現には、群の表現とは別の要素が関係している。これを理解すれば、群の表現論以上に強力が手法を手に入れたことになり、数学の他の分野の波及効果も大いに期待できる結果になると期待できる。

[1] [Miyamoto Masahiko](#), A C_2 -cofiniteness of cyclic orbifold models, *Comm. Math. Phys.* 335 no. 3 (2015),

[2] [Miyamoto Masahiko](#), C_2 -cofiniteness of orbifold models, arXiv:1812.00570.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 5 件)

[1] [Miyamoto Masahiko](#), Vertex Operator Algebras and Modular Invariance, *Proceedings*

of the Conference on Vertex Operator Algebras, Number Theory and Related Topics, (in press). 査読有

[2] Krauel Matthew, Miyamoto Masahiko, A modular invariance property of multivariable trace functions for regular vertex operator algebras, [J.Algebra 444 \(2015\)](#), 124-142. 査読有

[3] Miyamoto Masahiko, C₂-cofiniteness of cyclic-orbifold models, [Comm. Math. Phys. 335 \(2015\),no. 3](#), 1279-1286. 査読有

[4] Miyamoto Masahiko, Pure exactness of the principal cover of vertex operator algebras, [J. Algebra 423 \(2015\)](#), 289-300. 査読有

[5] Miyamoto Masahiko, C₁-cofiniteness and fusion products for vertex operator algebras, Conformal field theories and tensor categories, [Math. Lect. Peking Univ.](#), Springer, Heidelberg, (2014), 271-279. 査読有

〔学会発表〕(計 9 件)

[1] Miyamoto Masahiko, A combinatorial world using a super vertex operator algebra, Taipei International Workshop on Combinatorics and Graph Theory (国際学会) (2019)

[2] Miyamoto Masahiko, C₂-cofiniteness of orbifold model, Xiamen Workshop on Lie Theory and Related Topics (2019)

[3] Miyamoto Masahiko, From Mathieu to Conway, Vertex Operator Algebras and Related Topics (国際学会) (2018)

[4] Miyamoto Masahiko, Conference on Vertex Operator Algebras, Number Theory and Related Topics (2018)

[5] Miyamoto Masahiko, Hadamard matrix and superconformal algebra, 代数的組み合わせ論研究集会 (2017)

[6] Miyamoto Masahiko, Twelfth Night, or What Mathieu Will, Dubrovnic conference on representation (2017)

[7] Miyamoto Masahiko, Twelfth Night and Super Conformal Algebra of central charge 6, Nankai Symposium on Physics, Geometry and Number Theory 2017 ((国際学会) (2017)

[8] Miyamoto Masahiko, C₂-cofiniteness of orbifold models for Monster simple group, Conference in finite groups and vertex algebras Academia Sinica 台北市 (2016)

[9] Miyamoto Masahiko, C₂-cofiniteness of orbifold models for some finite simple automorphism groups, Moonshine and K3-surface (国際学会) 名古屋大学 (2016)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

出願年 :

国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

取得年 :

国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織
筑波大学・数理物質系

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。