

令和 元年 5 月 31 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26287006

研究課題名(和文) ガロア群と基本亜群の相互関から生じる数論的不変量の研究

研究課題名(英文) Studies on arithmetic invariants arising from mutual interactions between Galois groups and fundamental groupoids

研究代表者

中村 博昭 (Nakamura, Hiroaki)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：60217883

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,000,000円

研究成果の概要(和文)：数論的基本亜群へのガロア群の作用から生じる数論的関数の様々な性質を特定した。ガロア・ポリログ関数の振る舞いを詳細に調べ、素数  $p$  における惰性群上での特殊値の正規化が、 $p$  進ポリログ関数の値を表現する等式を導出した。楕円曲線の普遍族におけるモノドロミー表現から生じるアイゼンシュタイン不変量について合成法則を導くなど、今後の数論的ガロア・モノドロミー理論の進展の基礎を確立した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

絶対ガロア群に含まれる様々な数論的情報が、代数多様体のエタール的path空間への作用を通じて、どのように発現しているかを整数論・保形関数論のほか位相幾何学・表現論・組合せ群論の手法を援用して探究する。多重ゼータ値・多重ポリログ関数や一般化デデキント和などの数論的不変量に対する副有限群論的な解釈を通じて、整数論の新しい局面を切り開いた。

研究成果の概要(英文)：We found various properties of arithmetic functions arising from Galois representations in arithmetic fundamental groupoids. We investigated behaviors of Galois-polylogarithmic functions and derived a formula that relates their normalized special values on  $p$ -adic inertia group with standard  $p$ -adic polylogarithmic values. Elaborating the composition law for the Eisenstein invariants of universal monodromy representation in affine elliptic curves, we established a new foundation toward subsequent studies in arithmetic Galois monodromy theory.

研究分野：整数論

キーワード：数論的ガロア理論 基本群とガロア群 数論的位相幾何学

様式 C - 19, F - 19 - 1, Z - 19, CK - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

20世紀の中頃より A.Grothendieck 等による代数幾何学の基礎の整備がなされる中で、(絶対)ガロア群と代数多様体の基本群の概念はエタール基本群として統合され、さらに 1980 年代になると、それらの基本群がアーベル群から程遠い『遠アーベル的』と称される状況においては、その幾何学を統制するほどの豊かな構造がエタール基本群の中に見れるという期待が高まり、筆者や玉川安騎男氏・望月新一氏らによる双曲的代数曲線の場合の基本予想解決に至る仕事を軸として現在までに多くの成果が上がっている。タイヒミュラー群との関わりという観点からは、位相幾何学で知られている Dehn 捻りによる生成元と関係式に対して、有理数体の絶対ガロア群  $G(Q)$  がどのように明示的に作用するか、という問題についても、モジュライ空間の無限遠に由来するガロア・タイヒミュラー塔に関しては筆者と Schneps の共同研究により一定の解決を見た。ここで大切なのは、Drinfeld, 伊原により導入された Grothendieck-Teichmüller 群  $GT$  の概念であり、ガロア群の作用の記述とは、タイヒミュラー群の位相幾何的生成元のガロア変換を、絶対ガロア群  $G(Q)$  の各元の標準座標とみなした  $GT$  の主要パラメータにより記述することを意味する。このような背景の中で、未解決の重要な問題として『section 予想』と呼ばれる、有理点からガロア基本群の中に生じる分裂切断(section)の特徴づけ問題がある。また  $GT$  の主要なパラメータが絶対ガロア群の上でどのような数論的振る舞いをするかという問題、ガロア・タイヒミュラー塔の記述において、無限遠因子のみでなく、対称性の高い代数曲線を束ねているモジュライ空間の特殊跡に由来する射を含めた、より精緻なガロア・タイヒミュラー塔に対して、ガロア群の作用はどのように記述されるか、といった問題が残されている。こうした中、2010 年秋には、筆者が組織委員長を務めた第 3 回日本数学会季期研究所として国際研究集会 Galois-Teichmüller theory and Anabelian Geometry が開催され、日本を中核とする国際的な研究ネットワークがより堅固なものとして確立し、その成果は 2012 年秋に Advanced Studies in Pure Mathematics (Vol.63) から刊行された。筆者は 2013 年秋に岡山大学自然科学研究科から大阪大学理学研究科に異動し、引き続きガロア・タイヒミュラー群の組合せ構造と数論的ベータ関数の楕円曲線版、それらの被覆の Dessin 構造との関連性や、ニース大学の Wojtkowiak 氏との共同研究として展開した  $\ell$  進的な多重ポリログ関数を主題として研究を進めているが、多重ゼータ値や保形関数論の研究者の多い京阪地区での数論研究者層の相互交流の増進と次世代育成を視野に入れて、研究基盤の新たな充実が望まれる昨今である。

## 2. 研究の目的

絶対ガロア群に含まれる様々な数論的情報が、代数多様体のエタールの path 空間への作用を通じて、どのように発現しているかを整数論・保形関数論のほか位相幾何学・表現論・組合せ群論の手法を援用して探究する。多重ゼータ値・多重ポリログ関数や一般化デデキント和などの数論的不変量に対する副有限群論的な解釈を通じて、整数論の新しい局面を切り開く。また結び目理論と素数理論に関する数論的位相幾何学の見地を取り入れることで、遠アーベル幾何学の新たな深化を目指す。大阪大学整数論・保形形式セミナーへの研究者招聘をはじめ、京阪地域を中心に整数論研究者交流の活性化・次世代育成に向け若手研究者の活動をサポートする。

## 3. 研究の方法

エル進ポリログ関数・多重ポリログ関数について Coleman-伊原の公式の拡張を含め、Wojtkowiak 氏や佐久川憲児氏と協力して進める。Lille 大学の P.Debes 氏や上智大学の角皆宏氏と連携して、構成的ガロア理論における現代的な手法や被覆曲線の定義体ガロア降下の制御問題 (Debes-Douai 理論) について考察を進める。モジュラー曲線の基本群の Eisenstein 商に現れる数論的現象をとらえるための Eisenstein 不変量の理論を深める。河澄響矢氏、兵藤史武氏、井原健太郎氏、古庄英和氏と協力して、Johnson 準同形と組合せ群論をめぐるトポロジーの精緻な展開、エタール同類集合へのガロア作用とグロタンディーク・タイヒミュラー理論をめぐる諸問題、および多重ゼータ関数とモジュラー形式の相互関係について、課題に関係する研究テーマを推進する。九州大学の森下昌紀氏と協力して、研究集会の企画などを通じて、数論的位相幾何学理論の発展を図る。京都大学の玉川安騎男氏と協力して、副有限モノドロミー、ガロア表現、虚数乗法と関係するテーマの発展を図る。Oberwolfach のワークショップなどに参加し、海外の関係分野の研究者と交流し、最新の研究動向について集中的な情報収集を行う。

## 4. 研究成果

### (1) Coleman-伊原公式

円分単数のノルム整合列から生じるガロア群上の Soule 指標と  $p$  進エル関数の特殊値とを結びつける Coleman-Ihara 公式のポリログ関数による類似について、Wojtkowiak 氏および佐久川氏と共同研究を行った。まず  $p$  進ポリログ関数の 1 の累乗根での特殊値に対しては、射影直線  $\mathbb{P}^1$  の 3 点上で、原点における標準的な接ベクトルから 1 の累乗根への特別なパスのガロア変換から定義されるエル進ガロアポリログを、Coleman による古典的な局所相互法則を (従来と対置的に) 適用することで結びつけた。そして、この結果と Kim によるポリログ・アルバナー

ゼ写像の理論と佐久川による非アーベル的指数写像とを組み合わせることで、Beilinson-DeligneによるZagier予想の定式化で用いられるテンソル条件を満たすようなポリログ関数の適切な線形結合に対する一般化を論じた。佐久川憲児氏と Wojtkowiak 氏との共著論文として、エル進ポリログ関数の局所ガロア群上での振る舞いを記述する Coleman-Ihara 型の公式についての原著論文 "Polylogarithmic analogue of the Coleman-Ihara formula, I" が、Osaka J. Math. 54 (2017), 55--74 として刊行され、続編である "Polylogarithmic analogue of the Coleman-Ihara formula, II" も査読を経て、RIMS Kokyoroku Bessatsu に掲載された。

#### (2) Eisenstein 不変量

合成法則を中心に、Bloch-角皆により導入された  $SL(2, \mathbb{Z})$  の合同部分群上の完備群環表現を、有限レベルの合同部分群上の有限群環表現やアデル的関数などに変形する仕方について説明が進んだ。同時に Eisenstein 周期関数の副有限版について知見を整理した。これらの成果の一部については、ストラスプールで5月に行われた集会 "Geometrie, arithmetique et physique : autour des motifs" やスイスで8月行われた研究集会 "GRT, MZVs and associators" などでも報告した。Eisenstein 不変量の合成法則を中心にした理論の一部について、京都大学数理解析研究所において開催された研究集会「RIMS 研究集会：多重ゼータの諸相」(研究代表者：古庄英和)において講演し、この集会の報告集に "Moving frames and Eisenstein invariants" というタイトルで内容を寄稿し、数理解析研究所講義録 2015 巻 (2017年1月刊行) に収録された。ドイツのオーベルヴォルフアッハ数学研究所において開催された Mini-Workshop 「Arithmetic Geometry and Symmetries around Galois and Fundamental Groups」に参加し、成果発表を行った。(成果発表の記録は、OBERWOLFACH REPORTS, Volume 15, Issue 2, 2018 pp.1049-1050, doi:10.4171/OWR/2018/17 所収)。

(3) Wojtkowiak 氏との長年の懸案であったエル進ポリログ関数の分布型の関数等式 (Kubert 恒等式) について論文をまとめた。Wojtkowiak 氏とのエル進反復積分に関する分布型関数等式についての共著論文 "On distribution formula for complex and  $l$ -adic polylogarithms" (ArXiv:1711.03501) および、もう一篇のガロア・ポリログ関数の1のべき根における値の対からフルヴィッツ型  $L$  関数の有限アデル版構成を実現する新しい共著論文 "On adelic Hurwitz zeta measures" (ArXiv:1711.03505) の完成をみるなどの進展があった。

#### (4) ジョンソン準同形

東京大学数理解析科学研究所において、河澄響矢氏・逆井卓也氏と協力して "Workshop: Johnson homomorphisms and related topics" 研究集会を企画開催して、課題に係る内外の研究者と有意義な国際交流を実施し最新の研究内容や動向に関する情報を共有した。

#### (5) 数論的位相幾何学

2015年3月25日～28日には、福岡で国際研究集会「Low dimensional topology and number theory VII」を九州大学の森下昌紀氏と東京大学の河野俊武氏と共同主催した。この研究集会には、Anton Alekseev 氏を含む数名の研究者を海外から招聘し、Grothendieck-Teichmüller 理論で重要な発散コサイクルや結び目不変量・種々のトレース写像の一般化など課題に関連の深い最新の成果発表を交え、有意義な研究交流が実現できた。

2016年3月22日～25日には、福岡で国際研究集会「Low dimensional topology and number theory VIII」を九州大学の森下昌紀氏と東京大学の河野俊武氏と共同主催した。この研究集会には、Ted Chinburg, Nigel Boston 氏を含む数名の研究者を海外から招聘し、結び目群の指標多様体や副有限基本群、Belyi 関数・多重  $L$  関数など課題に関連の深い最新の成果発表を交え、有意義な研究交流が実現できた。

2017年3月15日～18日には、九州大学の森下昌紀氏が主催した国際研究集会「Low dimensional topology and number theory IX」への協力なども含め、分担者の角皆宏氏(上智大学)、森下昌紀氏(九州大学)、古庄英和氏(名大)と有意義な研究協力を推進できた。

2018年3月26日～29日には、九州大学の森下昌紀氏と国際研究集会「Low dimensional topology and number theory X」を共同で企画して、海外からの多数の研究者の招待講演も含めて、数論的トポロジーにおける Massey 積、副有限基本群におけるガロア表現や数論的不変量に関する成果を含む多角的な研究交流を実現することができた。

2019年3月11日～14日には、大阪大学において研究集会「Low dimensional topology and number theory XI」を森下昌紀氏と共同で企画した。海外からは K.Ono, M.L.Dawsey, I.Wagner, J.C.Cha 等の参加講演があり、国内からの参加講演も交えて有意義な成果発表の共有がなされた。

## 5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 2 件)

Hiroaki Nakamura, Kenji Sakugawa, Zdzilaw Wojtkowiak,  
“ Polylogarithmic analogue of the Coleman-Ihara formula, II ”  
in “Algebraic Number Theory and Related Topics 2014”  
(T.Tsuji, H.Takahashi, Y.Hoshi eds)  
RIMS Kokyuroku Bessatsu B64 (2017), 33-54. 査読有

Hiroaki Nakamura, Kenji Sakugawa, Zdzilaw Wojtkowiak,  
“ Polylogarithmic analogue of the Coleman-Ihara formula, I ”  
Osaka J. Math. 54 (2017), 55--74. 査読有

〔学会発表〕(計 9 件)

Hiroaki Nakamura,  
Adelic beta function and Eisenstein function in the  
Grothendieck-Teichmueller theory,  
Arithmetische Geometrie Oberseminar, Universität Bayreuth,  
December 14, 2018.

Hiroaki Nakamura,  
Topological aspects of adelic Eisenstein function,  
Laboratoire Paul Painlevé, Lille University,  
Séminaire Topologie, November 16, 2018.

中村 博昭  
「グロタンディーク・タイヒミュラー理論の話題から」,  
第 6 3 回 代数学シンポジウム, 東京工業大学,  
September 3-6, 2018.

Hiroaki Nakamura,  
Some aspect of arithmetic of profinite fundamental groups,  
Mini-Workshop: Arithmetic Geometry and Symmetries around Galois  
and Fundamental Groups (B.Collas, P.Debeas, M.Fried),  
Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany,  
April 15- April 21, 2018.

Hiroaki Nakamura,  
Moving frames and Eisenstein invariants,  
RIMS 研究集会「多重ゼータ値の諸相」,  
京都大学数理解析研究所, July 11-14, 2016.

Hiroaki Nakamura,  
Eisenstein invariant for once punctured elliptic curves,  
SwissMAP workshop "GRT, MZVs and associators",  
Les Diablerets, Switzerland, August 20-29, 2015.

Hiroaki Nakamura,  
Topology and arithmetic on the profinite Eisenstein quotient,  
"Geometrie, arithmetique et physique : autour des motifs "  
95e rencontre entre mathématiciens et physiciens théoriciens,  
IRMA, Univ. de Strasbourg, May 28-30, 2015.

Hiroaki Nakamura,  
Monodromy of elliptic curves and Mordell transformations  
in Grothendieck-Teichmueller theory,  
"Workshop on Multiple Zeta Values, Modular Forms and Elliptic Motives II",  
Instituto de Ciencias Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid ,  
Madrid, December 1-5, 2014.

Hiroaki Nakamura,  
Introduction to Grothendieck-Teichmueller theory I, II,  
Workshop "Braids and Arithmetic", CIRM, Luminy, Marseille  
October 13--17, 2014.

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：森下 昌紀  
ローマ字氏名：(MORISHITA, Masanori)  
所属研究機関名：九州大学  
部局名：数理学研究院  
職名：教授  
研究者番号(8桁)：40242515

研究分担者氏名：古庄 英和  
ローマ字氏名：(FURUSHO, Hidekazu)  
所属研究機関名：名古屋大学  
部局名：多元数理科学研究科  
職名：教授  
研究者番号(8桁)：60377976

研究分担者氏名：角皆 宏  
ローマ字氏名：(TSUNOGAI, Hiroshi)  
所属研究機関名：上智大学  
部局名：理工学部  
職名：教授  
研究者番号(8桁)：20267412

研究分担者氏名：玉川 安騎男  
ローマ字氏名：(TAMAGAWA, Akio)  
所属研究機関名：京都大学  
部局名：数理解析研究所  
職名：教授  
研究者番号(8桁)：00243105

研究分担者氏名：河澄 響矢  
ローマ字氏名：(KAWAZUMI, Nariya)  
所属研究機関名：東京大学  
部局名：大学院数理科学研究科  
職名：准教授  
研究者番号(8桁)：30214646

研究分担者氏名：井原 健太郎  
ローマ字氏名：(IHARA, Kentaro)  
所属研究機関名：近畿大学  
部局名：理工学部  
職名：准教授  
研究者番号(8桁)：00467523

研究分担者氏名：兵藤 史武  
ローマ字氏名：HYODO, Fumitake  
所属研究機関名：川崎医療福祉大学  
部局名：医療福祉マネジメント学部  
職名：助教  
研究者番号(8桁)：80707737

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。