

令和元年6月5日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26287008

研究課題名(和文) 圏論的手法による可換環上の加群の研究

研究課題名(英文) Study on modules over commutative rings by categorical methods

研究代表者

吉野 雄二 (Yoshino, Yuji)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：00135302

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,600,000円

研究成果の概要(和文)：20世紀の中頃にホモロジー代数という当時としては新しい数学が芽生えました。その理論が確立される過程において予想という形で提案された多くの問題が今も未解決のまま残っています。21世紀に入ると圏論的手法が導入されることが多くなり、それらの問題も圏という枠組みで捉えられるようになりました。予想の多くは有限生成、すなわち有限個の元とそれらの間の有限個の関係式で与えられるような代数的対象を問題としています。しかしながら本研究では、これらを一旦「無限にまで延長して」、一般導来圏という巨大な圏に拡げて問題を考察して、有限の場合の結果を導出することに成功しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数学の基礎研究であるので特に社会的意義を主張するには及ばない。しかしながら学術的には、半世紀以上未解決であった代数学の問題に対して、それを解決するための糸口が掴めたという点では大きな学術的意義があると考えている。

とくに今回の研究の全般を通して行った導来圏やホモトピー圏などの研究は、問題の解決という意図とは別に、それ自体が数学的に美しい体系を提供しているように思っている。

研究成果の概要(英文)：New mathematics called homological algebra has been established in the middle of the 20th century and in the process of this establishment, many problems and conjectures have arisen, which remain unsolved yet. Now in this new century, these problems are regarded as in the framework of the categories. The most interesting objective is to study finitely generated modules over commutative rings that are given by finitely many elements with finitely many relations. However, in this study, we consider the problems once in larger categories called unbounded derived categories that naturally involve infinitely generated modules. Eventually through these methods, we succeeded in deriving several results for finitely generated modules.

研究分野：代数学

キーワード：導来圏 三角圏 Cohen-Macaulay 加群 次数付き微分加群

## 1. 研究開始当初の背景

可換ネータ環上の有限生成とは限らない加群からなる非有界複体(有界と限らない複体)のなす導来圏(一般導来圏)については、局所化部分圏の分類がその small support を使ってなされるなど、ある程度の構造が知られていたに限定されていた。しかしながら、個々の非有界複体の完全性や局所化関手の構造についてはあまり多くのことが知られているわけではなかった。本研究では、可換ネータ環上の一般導来圏において新たなホモロジー理論を構築し、それを利用して可換ネータ環上の有限生成加群の構造および加群圏の構造を調べる。また加群の分類論、変形理論、退化の理論を圏論的に捉え直し、可換環上の加群または複体における様々な未解決問題に挑戦しようとした。

## 2. 研究の目的

本研究では、Cohen-Macaulay 加群の成す圏について、これまで研究代表者が行ってきた一連の研究を圏論的見地からとらえ直してさらに深化させることを全般的な目標とした。具体的には、Cohen-Macaulay 加群の圏において調べられ大きな成功を収めた成果を手本に、これを一般的な可換ネータ環上の加群圏、その部分圏である有限生成加群の圏、さらにはその上の鎖複体とその間の鎖写像のなすアーベル圏、そのホモトピー圏、そして導来圏へと広げ、圏論的かつホモロジー代数的な考察を緻密に行い、それらを可換環論およびその上の加群の理論にフィードバックすることである。これを通して可換ネータ環上の有限生成加群や有限鎖複体に対する多くの未解決問題の解決を目指す。

## 3. 研究の方法

最終的に目的とする対象は有限生成加群またはそれらから成る片側有界な鎖複体の構造の理解であるが、本研究の特色はそれらを一旦大きな枠組みで捉え直して一般的見地から考察を進めることである。具体的な研究対象としては、可換ネータ環上の無限生成加群から成る非有界複体の導来圏(一般導来圏)である。この圏の局所化部分圏・余局所化部分圏や局所化関手・余局所化関手の構造、さらには個々の非有界複体に対する完全性(非輪状性)の条件などを研究し、それによって有限または有界な場合の知見を得るという方法をとる。

## 4. 研究成果

(1) 本研究を通して最初に得られた成果は、可換ネータ環上の有限生成とは限らない加群から構成された鎖複体全部から成る導来圏(一般導来圏)において、鎖複体のホモロジーの消滅に関する一般的な定理が証明できたことである。厳密に言うと、二つの鎖複体  $W, X$  について、 $W$  のホモロジーのある種の有限性を仮定すると、二重複体  $\text{RHom}(W, X)$  のホモロジーの消滅と、 $W$  と  $X$  の導来テンソル積のホモロジーの消滅が同値であるということである。このような現象は、鎖複体としての有界性やホモロジー加群の有限生成性を仮定すれば知られていたことであるが、一般的な状況では知られていなかった。この形の定理としては、おそらく最も一般的な形で証明を与えることができた。(論文)

(2) 次に、(1)の証明のアイデアを更に進化させた形で、一般導来圏における局所双対定理や Auslander-Reiten 双対の根本を与えると思われるいくつかの原理(局所双対原理と Auslander-Reiten principle)に到達することができた。可換ネータ環上の非有界鎖複体の全体からなる一般導来圏における局所化部分圏のひとつひとつに対応して局所化関手が定まる。それらを局所コホモロジー関手と見做すことによって従来から知られている局所双対定理が最も一般的な形で成立することを証明した(局所双対原理、論文)。また、同様に有限次元代数の表現論で基本的な Auslander-Reiten 双対定理に関しても、各々の局所化関手に付随して一般的な形の定式化を提案しそれを厳密に証明することに成功した(Auslander-Reiten principle)。さらにこのような一般化された原理が Auslander-Reiten 予想に適用可能であり、ある条件下ではこの予想を肯定的に証明できることがわかった。(論文)

(3) 本研究の期間において最も大きな成果として、可換ネータ環上の有限生成射影加群から構成された非有界鎖複体の成すホモトピー圏において Auslander-Bridger 型の安定圏理論を構築し、全反射加群(totally reflexive module)を与える条件の対称性問題を完全に解決したことが挙げられる。これに関する基本定理は次のようにまとめることができる。(arXiv:1805.05705)

定理: 全商環が Gorenstein 的であるような可換ネータ環上の有限生成射影加群からなる非有界な鎖複体  $X$  について、 $X$  が完全であることとその双対複体  $X^*$  が完全であることは同値である。

整域や被約な可換ネータ環は条件を満たすので定理が適用できる。またこのような場合には、可換環に対する太刀川予想の肯定的な証明もこの定理から得られるという意味で今後発展が期待できる成果であると自負している。

(4) 次数付き微分加群(dg 加群)の持ち上げ問題について、1変数の単拡大であるような dg 代数上の dg 加群の場合には完全に解決することができた。変数の次数が奇数のときには、Seed Nasseh との共同研究(論文)。偶数のときには大学院生(当時)小野舞子との共同研究である。可換環ネータ環上の加群に対して未だ未解決の問題「Auslander-Reiten 予想」への解決の

緒が得られた訳で今後大きな理論に発展する可能性のあるものである。

(5) 本研究代表者が 2004 年に導入した加群の退化については、実際の計算が大変難しく、ごく少数の実例が知られているのみであった。今回、平松直哉、高橋亮との共同研究(論文)では(A)型の特異点についてその上の Cohen-Macaulay 加群の退化を具体的に記述することに成功した。

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 8件)

Naoya Hiramatsu, Ryo Takahashi and Yuji Yoshino: Degenerations over (A)-singularities and construction of degenerations over commutative rings, Journal of Algebra, vol. 525 (2019), 374--389. [査読有り]

Tsutom Nakamura and Yuji Yoshino: Localization functors and cosupport in derived categories of commutative Noetherian rings, Pacific J. of Math. vol. 296 (2018), no. 2, 405--435. [査読有り]  
DOI: 10.2140/pjm.2018.296.405

Saeed Nasseh and Yuji Yoshino: Weak liftings of DG modules, Journal of Algebra 502 (2018) 233--248. [査読有り]  
<https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2018.01.024>

Tsutom Nakamura and Yuji Yoshino: A local duality principle in derived categories of commutative Noetherian rings, Journal of Pure and Appl. Algebra, vol. 222, Issue 9 (2018), 2580--2595. [査読有り]  
<https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2017.10.008>

Hailong Dao, Osamu Iyama, Srikanth B. Iyengar, Ryo Takahashi, Michael Wemyss and Yuji Yoshino: Noncommutative resolutions using syzygies, Bulletin of the London Mathematical Society, vol. 51 (2019), 43--48. [査読有り]  
DOI:10.1112/blms.12210

Kenichi Sato and Yuji Yoshino: Primary decompositions in Abelian R-categories, Mathematical Journal of Okayama University, vol. 60 (2018), 91--108. [査読有り]

M. Ono and Y. Yoshino: An Auslander-Reiten principle in derived categories, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol.221, Issue 6 (2017), 1268--1278. [査読有り]  
(DOI) <http://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2016.09.009>

Y. Yoshino: A remark on vanishing of chain complexes, Acta Mathematica Vietnamica, Vol.40, Issue 1 (2015), 173--177. [査読有り]  
(DOI) 10.1007/s40306-015-0121-4

[学会発表](計 7件)

Yuji Yoshino, "The homotopy category of unbounded complexes of projective modules", In Workshop "Stable Cohomology: Foundations and Applications" at Snowbird, Utah, May 28 - June 1, 2018.

吉野雄二, Stable 'complex' theory, RIMS 共同研究第39回可換環論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所, 2017年11月13日--17日

中村力, 吉野雄二: AR principle と local duality の一般化について 第28回可換環論セミナー (岡山理科大学, 2016 Jan 24-27)

Maiko Ono, Yuji Yoshino "The principle of Auslander-Reiten duality", 第37回可換環論シンポジウム, 2015年11月18日-22日, 倉敷シーサイドホテル

Yuji Yoshino: A little more about Auslander-Reiten duality and conjecture for MCM, Derived categories of finite dimensional algebras, Conference honoring Hideto Asashiba

on the occasion of his 60th birthday. September 11-12, 2015, in Shizuoka University.

Yuji Yoshino:  $\cdot$  torsionfree and  $\cdot$  reflexive complexes, Commutative Algebra and Singularity Theory 2014、2014 年 7 月 28 日- 8 月 1 日、立山国際ホテル

吉野雄二: Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings, 2014 年度代数学賞受賞特別講演、2014 年 3 月 17 日、日本数学会年会(学習院大学)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等 なし

## 6. 研究組織

### (1)研究分担者

研究分担者氏名：  
ローマ字氏名：  
所属研究機関名：  
部局名：  
職名：  
研究者番号(8桁)：

### (2)研究協力者

研究協力者氏名：  
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。