

平成 30 年 5 月 24 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26287020

研究課題名(和文) 偏微分方程式の解の幾何とそれに付随する逆問題

研究課題名(英文) Geometry of solutions of partial differential equations and the inverse problems accompanied by it

研究代表者

坂口 茂 (SAKAGUCHI, SHIGERU)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：50215620

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,600,000円

研究成果の概要(和文)：逆問題の視点から、広く偏微分方程式で記述される問題の解の挙動と領域の幾何との関係を主に研究した。主な成果は、第1に3次元ユークリッド空間内の非有界な不変等温面の位相を完全に決定し、不変等温面による円柱面と平面のほぼ完全な特徴付けを得た。第2に3次元ユークリッド空間における複合媒質上の導電場方程式について、外部の一樣電場に影響を与えない中性導体による同心球の特徴付けに成功した。第3に複合媒質上の熱方程式において、2相熱伝導体の中で不変等温面および不変熱等流面による同心球の特徴付けを与えた。

研究成果の概要(英文)：We studied mainly the relationship between the behavior of solutions and the geometry of domains in the problems widely described by partial differential equations from the point of view of inverse problems. First, the topology of unbounded stationary isothermic surfaces in Euclidean 3-space was completely determined, and the almost complete characterization of the hyperplanes and the circular cylinders involving a stationary isothermic surface was obtained. Secondly, in the conductivity equation over composite media in Euclidean 3-space, we succeeded in characterizing the concentric balls by means of the neutral conductors without any influence on outside uniform electric fields. Thirdly, in the heat equation over composite media we obtained the characterization of the concentric balls involving either a stationary isothermic surface or a surface with the constant heat flow property among two-phase heat conductors.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：熱拡散方程式 不変等温面 複合媒質 不変等熱流面 反応拡散方程式 半線形楕円型方程式 囲い込み法 逆問題

1. 研究開始当初の背景

研究代表者と海外研究協力者の Rolando Magnanini 教授 (フィレンツェ大学) との共同による、熱方程式の解の時刻について不変な等温面や臨界点に関する 1996 年から始まり過去約 17 年間に渡る研究があった。特に、不変等温面による球面や超平面の特徴付けの定理は殆ど完成していたが、円柱面の特徴付けは 3 次元ユークリッド空間内の有限位相 (閉曲面から有限個の点を除いたものと同相) の非有界な超曲面の範囲でのみ得られていた。また、これまでの研究は広く偏微分方程式の解の挙動と領域の幾何の関係に着目すれば、解の特徴的な挙動から領域の形状を決定する逆問題として捉えることができ、逆問題の視点に立てば、偏微分方程式の解の定性理論および幾何解析の分野へ更なる貢献が期待されていた。

2. 研究の目的

研究目的は広く偏微分方程式の初期値問題や境界値問題において、解の挙動と領域の幾何の関係を調べる順問題とそれに付随する逆問題を研究することであった。主な研究課題は次のようであった。

(1) 拡散方程式の解のより精密な初期挙動と領域の幾何の関係を調べる順問題

(2) 拡散方程式の解の不変等温面により領域を特徴付ける逆問題

(3) 広く偏微分方程式の解の挙動と領域の幾何の関係を調べる順問題

(4) 広く偏微分方程式に関する解や領域の形状を特徴付ける逆問題

3. 研究の方法

普段の研究組織内での研究打合せ (電子メールと必要に応じた直接の打合せ) および必要に応じた国内外の研究協力者との討論・情報交換により研究を進めた。そのために主に以下を実施した。

(1) 研究課題に関連して、偏微分方程式、幾何学、逆問題について次の研究集会の世話人を研究組織員 (一部は研究協力者) が務めた。

1 青葉山勉強会第 15 回「PDEs and Inverse Problems」(H30 年 2 月, 仙台)

2 東北大知のフォーラムイベント「Geometry and Inverse Problems in cooperation with A3 foresight program」(H29 年 10 月, 仙台)

3 RIMS 共同研究「偏微分方程式の解の形状解析」(H29 年 6 月, H28 年 11 月 京都)

4 第 5 回伊日ワークショップ「Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's」(H29 年 5 月, 大阪)

5 国際研究集会「Geometry of solutions of PDE's and its related inverse problems」(H28 年 10 月, 仙台)

6 RIMS 研究集会「偏微分方程式の解の形状と諸性質」(H27 年 11 月, H26 年 11 月 京都)

7 第 4 回伊日ワークショップ「Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's」(H27 年 5 月, パリヌーロ, イタリア)

(2) 全期間を通じて、必要に応じて、国内外での研究集会等に出席し、成果発表及び多くの研究協力者との討論・情報交換・情報収集を行った。

(3) 代表者がフィレンツェ大学へ出張し海外共同研究者の Rolando Magnanini 教授との直接の討論・情報交換を行った。(H29 年 11 月, H28 年 12 月)

(4) 海外から次の研究協力者を仙台へ招聘し直接の討論・情報交換を行った。

1 Xiaofei Li 研究員 (H30 年 2 月)

2 Robin Tonra Neumayer 研究員 (H28 年 11 月)

3 Daniel Peralta-Salas 教授 (H28 年 10 月)

4 Paolo Salani 教授 (H28 年 10 月)

5 Alberto Farina 教授 (H27 年 11 月)

6 Francois Alouges 教授 (H27 年 8 月)

4. 研究成果

主な研究成果は次のようである。

(1) 3 次元ユークリッド空間上の熱方程式の初期値問題の解の不変な等温面による円柱面と超平面のほぼ完全な特徴付けを与えた。これは 3 次元ユークリッド空間に埋め込まれた極小曲面と平均曲率一定曲面の分類理論、不変等温面に平行な平均曲率一定曲面が存在すること及び等径超曲面に関連した Transnormal functions の理論を活用して非有界な不変等温面の位相を完全に決定できたことによる。

(2) 3 次元ユークリッド空間上の導電場方程式を考えて、複合媒質特有の外部の一様電場に影響を与えない中性導体としての同心球の特徴付けに成功した。2 次元の場合は既に知られていたが、3 次元の場合は未解決であった。この結果は当初予期していなかった新たな知見である。複合媒質を考えることは既知の媒質に含まれる未知の介在物を探索する逆問題において自然なことであり、この成果は本研究に新たな展開を齎した。

(3) 成果 (2) の新たな展開として、一般次元のユークリッド空間内の複合媒質上の熱拡散を考えて、不変等温面による同心球の特徴付けを与えた。複合媒質に伴う不連続な熱伝導率を記述する楕円型作用素を扱うために、熱伝導率の不連続面上の伝送条件から派生する新たな技術的困難さや自由度のために、自然な問題であるにも関わらず複

合媒質の場合は未解明であった。

(4) 一般次元のユークリッド空間内の超曲面が不変等熱流面であるとは、各時刻で熱流のベクトル値流速密度の法線方向成分がその曲面上一定であることをいう。ここでは複合媒質上の熱拡散を考えて不変等熱流面による同心球の特徴付けを与えた。(論文を学術雑誌に投稿中)

(5) 優臨界の増大度を持つ半線形楕円型方程式の球領域におけるディリクレ問題の正值球対称解のなす分岐構造を研究し、指数関数より早く増大する非線形項を持つ場合について、特異解の存在を示し、古典解との交点数を明らかにした。

(6) 非コンパクトな距離グラフ上での非線形シュレディンガー方程式のエネルギー基底状態の存在問題やアレンカーン型方程式に対するヘテロクリニック解の存在・非存在問題を変分法的手法により研究し、グラフの形状および空間非斉次生との関係を調べた。

(7) 時間依存領域上の様々な方程式 (Maxwell 方程式系, 熱方程式, 熱弾性体の振動の支配方程式) の逆問題に池畠の囲い込み法を改良・適用し、領域の幾何学的情報を解の情報から抽出・評価する方法を提案した。

(8) 様々な非線形発展方程式の漸近形を知るための漸近展開理論を進展させ解全体の構造を調べた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 39 件)

¹ Shigeru Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a stationary isothermic surface and their related elliptic overdetermined problems, 数理解析研究所講究録別冊, 査読有, 2018, 掲載受理印刷中

² Yasuhiro Miyamoto, A limit equation and bifurcation diagrams for semilinear elliptic equations with general supercritical growth, J. Differential Equations, 査読有, 264, 2018, pp. 2684-2707. DOI: 10.1016/j.jde.2017.10.034

³ Masaru Ikehata, On finding a cavity in a thermoelastic body using a single displacement measurement over a finite time interval on the surface of the body, J. Inverse III-Posed Problems, 査読有, 掲載受理印刷中,

DOI: 10.1515/jiip-2017-0066

⁴ Lorenzo Cavallina, Locally optimal configurations for the two-phase torsion problem in the ball, Nonlinear Anal. 査読有, 162, 2017, pp. 33--48. DOI:10.1016/j.na.2017.06.005

⁵ Kazuhiro Ishige, Tatsuki Kawakami, and Hironori Michihisa, Asymptotic expansions of solutions of fractional diffusion equations, SIAM J. Math. Anal., 査読有, 49, 2017, pp. 2167--2190.

DOI: 10.1137/16M1101428

⁶ Shigeru Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a stationary isothermic surface, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 査読有, 48, 2016, pp. 167--187.

DOI: 10.13137/2464-8728/13155

⁷ Hyeonbae Kang, Hyundae Lee, and Shigeru Sakaguchi, An over-determined boundary value problem arising from neutrally coated inclusions in three dimensions, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 査読有, (5) 16, 2016, pp. 1193--1208.

DOI: 10.2422/2036-2145.201502_010

⁸ Rolando Magnanini, Daniel Peralta-Salas, and Shigeru Sakaguchi, Stationary isothermic surfaces in Euclidean 3-space, Math. Annalen, 査読有, 364, 2016, pp. 97--124.

DOI: 10.1007/s00208-015-1212-1

⁹ Shuichi Jimbo and Kazuhiro Kurata, Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian on a thin domain under the mixed boundary condition, Indiana Univ. Math. J., 査読有, 65, 2016, pp. 867--898.

¹⁰ Shigeru Sakaguchi, Interaction between fast diffusion and geometry of domain, Kodai Math. J. 査読有, 37, 2014, pp. 680--701.

DOI: 10.2996/kmj/1414674616

[学会発表](計 91 件)

¹ Lorenzo Cavallina, Rolando Magnanini, and Shigeru Sakaguchi, 不変等流面を有する二相熱伝導体の幾何学的形状, 日本数学会年会, 2018 年

² Shigeru Sakaguchi, Two-phase heat conductors, stationary isothermic surfaces and surfaces with the constant flow property, 研究集会「非線形現象の数値シミュレーションと解析 2018」, 2018 年

³ Shigeru Sakaguchi, Two-phase heat conductors, stationary isothermic surfaces and surfaces with the constant flow property, RIMS Workshop on Inverse problems of partial differential equations and related topics, 2018 年

⁴ Shigeru Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a surface of the constant flow property, Geometric aspects of PDEs, 2017 年

5 Shigeru Sakaguchi, Two-phase heat conductors, stationary isothermic surfaces and surfaces with the constant heat flow property, The third Spanish-Japanese workshop on Differential Geometry, 2017 年

6 坂口 茂, 不変等温面を伴う二相導体と関連する楕円型優決定問題, 日本数学会秋季総合分科会, 2017 年

7 坂口 茂, 不変等温面を伴う二相導体と関連する優決定問題, ひこね解析セミナー(第2回), 2017 年

8 Shigeru Sakaguchi, Two-phase heat conductors in two dimensions and related overdetermined problems, The 5th Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, 2017 年

9 Shigeru Sakaguchi, Two-phase conductors and overdetermined problems with transmission conditions, Geometry of solutions and PDE's and its related inverse problems, 2016 年

10 坂口 茂, 一つの不変等温面を伴う二相導体, 日本数学会秋季総合分科会, 2016 年

11 大沼正樹・坂口 茂, 平均曲率方程式の半連続解に対する強比較定理, 日本数学会秋季総合分科会, 2016 年

12 Shigeru Sakaguchi, Two-phase heat conductors with a stationary isothermic surface, RIMS Workshop on Regularity, singularity and long time behavior for partial differential equations with conservation law, 2016 年

13 坂口 茂, Neutrally coated inclusions in three dimensions, 研究集会「HMA セミナー冬の研究会 2016」, 2016 年

14 Shigeru Sakaguchi, Neutrally coated inclusions in three dimensions, 2015 NCTS Workshop on Partial Differential Equations and Applied Mathematics, 2015 年

15 坂口 茂, Neutrally coated inclusions in three dimensions, 研究集会「第11回非線型の諸問題」, 2015 年

16 坂口 茂, Neutrally coated inclusions in three dimensions, 日本数学会秋季総合分科会, 2015 年

17 坂口 茂, Neutrally coated inclusions in three dimensions, 研究集会「パターン生成とダイナミクスの解構造の探求」, 2015 年

18 坂口 茂, 不変等温面および不変等温線とその対称性, 日本数学会年会, 2015 年

19 坂口 茂, 不変等温面とその対称性, 研究集会「THE NINTH MEETING ON PROBABILITY AND PDE」, 2014 年

20 坂口 茂, 3次元ユークリッド空間内の不変な等温面, 研究集会「第5回ハミルトン系とその周辺」, 2014 年

〔図書〕(計1件)

1 坂口 茂, 偏微分方程式の解の幾何学, サイエンス社, 2017, 112

〔その他〕

ホームページ等

<http://researchmap.jp/sigersak2012415/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

坂口 茂 (SAKAGUCHI Shigeru)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号: 50215620

(2) 研究分担者

倉田 和浩 (KURATA Kazuhiro)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10186489

(3) 研究分担者

川上 竜樹 (KAWAKAMI Tatsuki)
龍谷大学・理工学部・准教授
研究者番号: 20546147

(4) 研究分担者

宮本 安人 (MIYAMOTO Yasuhito)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 90374743

(5) 研究分担者

池畠 優 (IKEHATA Masaru)
広島大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号: 90202910

(6) 連携研究者

石毛 和弘 (ISHIGE Kazuhiro)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 90272020

(7) 連携研究者

三上 敏夫 (MIKAMI Toshio)
津田塾大学・学芸学部・教授
研究者番号: 70229657

(8) 連携研究者

三沢 正史 (MISAWA Masashi)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 40242672

(9) 研究協力者

CAVALLINA Lorenzo
東北大学・大学院情報科学研究科・D3