

令和元年5月29日現在

機関番号：12604

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26287021

研究課題名(和文)非線形放物型方程式系の解の爆発現象の解析

研究課題名(英文)Analysis on blowup phenomena in nonlinear parabolic systems

研究代表者

溝口 紀子(MIZOGUCHI, Noriko)

東京学芸大学・教育学部・准教授

研究者番号：00251570

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、放物型 放物型走化性方程式系の解の爆発問題を領域が有界な場合と全空間の場合を総合的に研究した。本研究では、領域が全平面の場合には第二方程式における時間微分の係数の影響が顕著に表れることを示し、放物型 放物型走化性方程式系と単純化された放物型 楕円型方程式系では数学的に異なる構造をもつことを証明した。また、解が爆発するときの挙動についても研究し解明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

放物型 放物型走化性方程式系は生物学におけるバクテリアの集中現象を記述するモデルとして1970年にKellerとSegelによって提唱された。また、高次元で退化した拡散項をもつ場合は宇宙物理学への応用も知られている。集中現象は数学的には解の爆発と定義される。放物型 放物型走化性方程式系の解の爆発を数学的に扱うのが困難であったので放物型 楕円型に単純化された方程式系でしか研究されて来なかったが、本研究では本来の放物型 放物型方程式系の解の爆発を数学的に研究し成果をあげた。

研究成果の概要(英文)：We considered the blowup problem of a parabolic-parabolic chemotaxis system, which was introduced as a model of aggregation of bacteria. It was too difficult to study blowup of solutions of the system, and there have been only a few results for several decades. In this study, we proved essential results on the existence of blowup solutions and on blowup type of the system including the case of degenerate diffusion.

研究分野：非線形解析

キーワード：爆発 放物型 走化性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

放物型 放物型走化性方程式系は生物学におけるバクテリアの集中現象を記述するモデルとして1970年にKellerとSegelによって提唱された。また、高次元で退化した拡散項をもつ場合は宇宙物理学への応用も知られている。細胞の集中現象は数学的には解の爆発と定義される。生物学や物理学への応用という観点だけでなく、数学的にも比較定理が適用できないという観点から研究が進んでいる放物型方程式とは異なる構造をもち、一方で流体の方程式に似た構造をもっているにも関わらず現れる現象は異なるという数学的にも非常に興味深い研究対象である。応用と理論の両方から国内外で広く研究されてきた分野である。

放物型 放物型走化性方程式系の解の爆発を数学的に扱うのが困難であったので放物型 楕円型に単純化された方程式系が導入され、解の爆発についてはその単純化された方程式系に対する研究しか行われていなかった。本研究の直前に研究代表者とWinker氏によって、円盤上で放物型 放物型走化性方程式系を考えると有限時間で爆発する球対称解が存在することが証明された。しかしながら、それ以外には結果がなく、放物型 放物型走化性方程式系において長年の最重要問題のひとつであった解の爆発に関する多くの問題が未解決のままであった。

2. 研究の目的

(1) 放物型 放物型走化性方程式系の有限時間で爆発する球対称な解の存在を全空間においても示し、さらに、解の球対称性という制限を外した一般の場合にも解の存在を証明する。

(2) 第一方程式が退化した拡散項をもつとき、高次の空間次元との関係で臨界に相当する場合があります。数学的な扱いが難しい。線形の拡散項では2次元が臨界になるが同様の困難が生じる。本研究では、臨界の場合の特徴づけを総合的に行う。

(3) 有限時間で爆発する解の爆発のタイプを決定することは爆発問題における重要な問題である。非線形偏微分方程式では、後方自己相似解と同じ速度の爆発はtype I、それより速い速度での爆発はtype IIと分類されている。本研究では、放物型 放物型走化性方程式系の解の爆発のタイプを明らかにする。

(4) さらに、爆発するとき解がどのような特異性をもつかを解明する。

3. 研究の方法

非線形放物型方程式系の解の爆発は流体の方程式とも関連があるので、その研究者であるミネソタ大学に出張して流体の方程式の世界的権威であるV.Sverak氏と議論をした。流体に関連する研究には高田氏とも活発に意見交換をおこなった。非線形偏微分方程式の解の爆発ではF. Merle氏やY. Martel氏、Ph. Souplet氏をはじめとしてパリに強力なグループがあるので、パリに出張して彼らと議論をおこなった。

4. 研究成果

(1) 2次元全平面での放物型 放物型走化性方程式系の解の爆発においては、第二方程式の時間微分が大きな影響を与えることを発見し、実際にその時間微分の大きさに関連した数値を具体的に求め球対称な解の爆発に関する十分条件を得た。有界領域ではこのような現象は現れず、時間大域解の構造が爆発問題と密接に関連することを明確にした。

(2) 第一方程式が臨界型の拡散項をもつ場合の放物型 放物型走化性方程式系において、空間次元が3と4の場合に有限時間で爆発する球対称な解が存在することを領域が球だけでなく全空間の場合も証明した。

(3) 臨界型の退化した拡散項をもつ放物型 放物型走化性方程式系ではtype IIの爆発しか起こらないことを球対称性を仮定しないで一般の場合に証明した。放物型 楕円型に単純化された方程式系では後方自己相似爆発解の存在が知られているので、これにより退化した拡散項を持つ場合にも放物型 放物型と放物型 楕円型との本質的な違いが明らかになった。また、孤立した爆発点における特異性は2次元における線形の場合と同様にディラック測度であることを示した。

(4) 2次元の有界領域および全平面において球対称性を仮定しないで一般の場合に有限時間で爆発する解はtype IIの爆発しかしないことを証明した。この結果によって、2次元放物型 放物型走化性方程式系の爆発のタイプに関する問題を完全に解決した。その証明の手法は流体の方程式であるNavier-Stokes方程式とも関連があり幅広い応用が期待される。

(5) 3次元 Boussinesq 方程式の初期値問題の研究を行い、浮力周波数を無限大とする特異極限問題において 解である3次元の速度ベクトル場が2次元 Euler 方程式の古典解に収束することを示した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 16 件)

Noriko Mizoguchi, Determination of blowup type in the parabolic-parabolic Keller-Segel system, Math. Ann. (to appear) 査読有

DOI: 10.1007/s00208-018-1772-y

Matthias Hieber, Alex Mahalov, Ryo Takada, Time periodic and almost time periodic

solutions to rotating stratified fluids subject to large forces, *Journal of Differential Equations*, 266 (2019) 977-1002 査読有
 DOI: 10.1016/j.jde.2018.07.067

Ryo Takada, Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equations, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 232 (2019) 1475-1503 査読有
 DOI: 10.1007/s00205-018-01347-4

Philippe Laurencot, Kazuhiro Ishige, Noriko Mizoguchi, Blow-up behavior of solutions to a degenerate parabolic-parabolic Keller-Segel system, *Math. Ann.* 367 (2017), 461-499 査読有
 DOI:10.1007/s00208-016-1400-7.

Philippe Laurencot, Noriko Mizoguchi, Finite time blowup for the parabolic-parabolic Keller-Segel system with critical diffusion, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire* 34 (2017), 197-220 査読有
 DOI:10.1016/j.anihpc.2015.11.002.

Tsukasa Iwabuchi, Alex Mahalov, Ryo Takada, Global solutions for the incompressible rotating stably stratified fluids, *Mathematische Nachrichten* 290 (2017) 613-631 査読有
 DOI: 10.1002/mana.201500385

Sanghyuk Lee, Ryo Takada, Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations, *Indiana University Mathematics Journal* 66 (2017) 2037-2070 査読有
 DOI: 10.1512/iumj.2017.66.6179

Noriko Mizoguchi, Type II blowup in the doubly parabolic Keller-Segel system in two dimensions, *Journal of Functional Analysis* 271 (2016), 3323-3347 査読有
 DOI:10.1016/j.jfa.2016.09.016

Ryo Takada, Long time existence of classical solutions for the 3D incompressible rotating Euler equations, *Journal of the Mathematical Society of Japan* 68 (2016) 579-608 査読有
 DOI : 10.2969/jmsj/06820579

Ryo Takada, Remarks on lower bounds for the maximal existence time to the 3D rotating Euler equations, *RIMS Kokyuroku Bessatsu B56* (2016) 93-106 査読有

Tsukasa Iwabuchi, Ryo Takada, Dispersive effect of the Coriolis force and the local well-posedness for the Navier-Stokes equations in the rotational framework, *Funkcialaj Ekvacioj* 58 (2015), 365-385. 査読有
 DOI: 10.1619/fesi.58.365

Philippe Souplet, Noriko Mizoguchi, Nondegeneracy of blow-up points for the parabolic Keller-Segel system, *Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse non linéaire* 31 (2014), 851-875 査読有
 DOI:10.1016/j.anihpc.2013.07.007.

Tsukasa Iwabuchi, Ryo Takada, Global well-posedness and ill-posedness for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force in function spaces of Besov type, *Journal of Functional Analysis* 267 (2014), 1321-1337 査読有

Youngwoo Koh, Sanghyuk Lee, Ryo Takada, Dispersive estimates for the Navier-Stokes equations in the rotational framework, *Adv. Differential Equations* 19 (2014), 857-878 査読有

Hideo Kozono, Yuki Mashiko, Ryo Takada, Existence of periodic solutions and their asymptotic stability to the Navier-Stokes equations with the Coriolis force, *J. Evol. Equ.* 14 (2014), 565-601 査読有
 DOI: 10.1007/s00028-014-0228-4

Youngwoo Koh, Sanghyuk Lee, Ryo Takada, Strichartz estimates for the Euler equations in the rotational framework, *Journal of Differential Equations* 256 (2014), 707-744 査読有
 DOI: 10.1016/j.jde.2013.09.017

[学会発表](計 67 件)

溝口紀子, Finite-time blowup in a Cauchy problem of parabolic-parabolic chemotaxis system, 京都大学 NLPDE セミナー, 2018

Ryo Takada, Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equations, Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2018

Ryo Takada, Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equation, *Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics*, 2018

Ryo Takada, Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equations KYUSHU UNIV.-- POSTECH -- SJTU Joint Workshop on PDEs and Related Topics, 2018

Ryo Takada, Asymptotic limit of strong stratification for the 3D inviscid

- Boussinesq equations, Critical exponent and nonlinear evolution equations 2018
Noriko Mizoguchi, Finite-time blowup in a degenerate parabolic-parabolic Keller-Segel system, PDE Seminar at University of Minnesota, 2017
Ryo Takada, Time periodic initial value problem for rotating stably stratified fluids, Geophysical Fluid Dynamics, Oberwolfach Meeting, 2017
 高田了, Time periodic initial value problem for rotating stably stratified fluids, 京都大学 NLPDE セミナー, 2017
Ryo Takada, Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations, Conference on PDEs and Applications to Physical and Biological Sciences, 2017
Ryo Takada, Strongly stratified limit for the 3D inviscid Boussinesq equations, The 15th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2017
Noriko Mizoguchi, Finite-time blowup in the degenerate parabolic Keller-Segel system with critical diffusion, Workshop on nonlinear partial differential equations and related topics, 2016
Noriko Mizoguchi, Nonexistence of type I blowup solutions to parabolic-parabolic Keller-Segel system, Variational Problems and Nonlinear Partial Differential Equations, 2016
Noriko Mizoguchi, Type II blowup in a parabolic-parabolic chemotaxis system, PDE Seminar at University of Minnesota, 2016
Ryo Takada, Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2016
Ryo Takada, Global solutions for the incompressible rotating stably stratified fluids, The 13th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2016
Noriko Mizoguchi, Finite-time blowup in the parabolic-parabolic Keller-Segel system, PDE Seminar at University of Minnesota, 2015
Ryo Takada, Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations, Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo, 2015
Ryo Takada, Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations, IRTG 1529 Mathematical Fluid Dynamics Seminar, 2015
Ryo Takada, Dispersive estimates for rotating fluids and stably stratified fluids I, The 12th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2015
Ryo Takada, Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations, The Navier-Stokes Equations and Related Topics -- In Honor of the 60th Birthday of Professor Reinhard Farwig, 2015
- ⑳ Noriko Mizoguchi, Optimal criterion for finite-time blowup in Keller-Segel system, Mathematical properties of solutions to models of chemotaxis, 2014
- ㉑ Noriko Mizoguchi, Finite-time blowup in the two dimensional parabolic-parabolic Keller-Segel system, Seminaire Equations aux Derivees Partielles non-lineaires, 2014
- ㉒ Ryo Takada, Long time solvability for the 3D rotating Euler equations, VORTICITY, ROTATION AND SYMMETRY (III) - Approaching Limiting Cases of Fluid Flows, 2014
- ㉓ Ryo Takada, Long time solvability of the 3D incompressible Euler equations with high-speed rotation, Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, 2014
- ㉔ Ryo Takada, Long time solvability for the 3D rotating Euler equations, The 10th AIMS conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, SS83 Fluid flows in unbounded domains, 2014
- ㉕ Ryo Takada, Remarks on the Strichartz estimates for the rotating incompressible fluids, Autumn School and Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2014
- ㉖ 高田了, Long time existence of classical solutions to the 3D rotating Euler equations, 微分方程式の総合的研究, 2014

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：高田了

ローマ字氏名：TAKADA, Ryo

所属研究機関名：九州大学

部局名：大学院数理学研究院

職名：准教授

研究者番号(8桁): 50713236

(2)研究協力者

研究協力者氏名：Vladimir Sverak

ローマ字氏名：Vladimir Sverak

研究協力者氏名：Philippe Souplet

ローマ字氏名：Philippe Souplet

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。