

平成 30 年 8 月 31 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26287024

研究課題名(和文) 反応拡散系および自由境界問題の解のパターンダイナミクスの解明

研究課題名(英文) Pattern dynamics of reaction-diffusion systems and free boundary problems

研究代表者

二宮 広和 (Ninomiya, Hirokazu)

明治大学・総合数理学部・専任教授

研究者番号：90251610

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,700,000円

研究成果の概要(和文)：反応拡散系などの非線形偏微分方程式系の形状のある解を捉えるために、境界の方程式と場の方程式により構成される「反応界面系」という枠組みを導入した。この方程式系は、特異極限問題から得られる自由境界問題の一種である。その方程式系の多次元進行波解の存在証明や1次元解のダイナミクスを調べることに成功した。また、異方的な外力をもつ平均曲率流問題では、異方性のパラメータが形状にもたらす影響を調べることに成功した。多次元の形状を数理的に調べる手法として、多層化方程式の概念の導入にも成功した。

研究成果の概要(英文)：To study the spatial patterns of solutions of partial differential equations, such as reaction-diffusion systems, we introduce a reaction-interface system, which consists of the interface equation and an equation in the whole space. This is derived as a singular limit of some reaction-diffusion systems. We studied the multidimensional traveling wave solution and the pulse dynamics of the reaction-interface system. Moreover, for the curvature flow with the anisotropic external force, we study the influence of the anisotropy to the compact traveling wave solutions. We also introduce the layered system to analyze the spatial profiles of solutions in multidimensional space.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：パターン形成 反応拡散系 自由境界問題 特異極限法 進行波解 スパイラル

1. 研究開始当初の背景

非線形放物型偏微分方程式系には、時空間においてさまざまな形状をもつ解が存在することが数値的、実験的に知られている。しかし、数学的に解の形状に関する情報が得られている研究結果は、1次元空間におけるものが多く、多次元空間では存在定理が多くを占めている。多次元空間における解形状を数学的に解析することが困難な理由としては次のようなことが考えられる。定数定常解からの分岐解析や写像度などの位相的解析手法では、形状など解の詳しい情報を得ることは難しい。一方、解の形状に関する情報を得るために導入された特異極限問題や漸近展開などの解析的手法では、解の空間的な情報に関する自由境界問題が導出されるが、この自由境界問題を解くことが難しくなってしまう。実際、非線形放物型偏微分方程式系の特異極限から自由境界問題を導出する研究は P. Fife (1984, 1988), J. Keener (1986), X.-F. Chen (1992), Y. Nishiura (1994) や de Mottoni-Schatzman (1995) など 80 年代後半から 90 年代にかけて精力的に行われた。しかし、得られた自由境界問題は扱いが難しく、局所解の存在については X.-F. Chen(1992)などの結果が知られているが、自由境界問題の解の挙動に関する解析は近年まで 1次元空間の場合を除いて進んでいない。

2. 研究の目的

反応拡散系（拡散項と反応項のみからなる半線形放物型方程式系）などの非線形偏微分方程式系の特異極限問題として現れる自由境界問題から、より扱いやすい自由境界問題を導出し、その自由境界問題から形状に関する情報を得る数学的手法の開発および形状のもつ性質を調べることを目的としている。

3. 研究の方法

以下の3つのテーマを中心に研究を進めることで、反応拡散系および自由境界問題における形状をもった解を取り扱う解数学的手法の開発および解の形状に関する情報の導出を行う。

テーマ1：反応界面系から形状に関する情報を得る手法の開発

解の形状が得られる方程式として、移動境界の法線速度が場の変数によって決まる界面方程式（等高面法を介して Hamilton-Jacobi 方程式）と移動領域に依存する場の方程式よりなる結合系を取り上げる。以降、この方程式を反応界面系と呼ぶ。この反応界面系の局所解の存在定理、特殊解の存在証明、大域解の存在条件を求める。さらに非線形放物型偏微分方程式の特異極限問題を考察し、自由境界問題ともとの方程式の関係を調べる。

テーマ2：形状のもつ性質とその制御

移動領域の形状に関する情報を得るため、

数値計算により形状とパラメータの関係を調べる。また、進行スポット解や回転スパイラル解などの特殊解での線形化固有値問題を数値的に解析し不安定固有関数を求めることで、形状の変形と反応界面系の関係を調べる。

テーマ3：反応界面系の解を近似解として用いることで、心室細動、細胞運動、結晶成長などに現れる反応拡散系など非線形放物型偏微分方程式系の解を構成する。

4. 研究成果

この研究課題の主な研究成果としては、「反応界面系」という枠組みを導入し、その多次元進行波解の存在証明や1次元解のダイナミクスを調べることに成功した。また、異方性などのパラメータが形状にもたらす影響を調べることに成功した。多次元の形状を数理的に調べる手法として、多層化方程式の概念の導入にも成功した。詳しくは、以下の通りである。

二宮（代表者）は、反応界面系を導入し、その多次元進行スポット解の構成やV字進行波解の構成を行った。それをさらに簡略化した自由境界問題では、回転スポット解の構成について調べた。物部（連携研究者）と共同で、異方性のある外力項をもつ曲率流の進行波解は、常に凸になることを示し、存在や一意性の条件を調べた。また、多次元解の空間的な情報を得る手段として、多層化による低次元化の手法を提案し、三竹（分担者）と論文を執筆中である。さらに、反応拡散系の特異極限問題の応用として、対称な積分核をもつ非局所方程式が反応拡散系で近似できることを示した。

飯田（分担者）は、二宮・物部らと共同で反応拡散系の特異極限問題において、非線形項がバランスしない場合にどのような極限問題が現れるかを調べ、界面が移動しない場合や一瞬で消える場合などがあることを発見し、論文にまとめた。

谷口（分担者）は、Allen-Cahn 方程式および競合拡散方程式系において多次元進行波を研究した。具体的には、(N-1)次元空間において凸図形がひとつ与えられたとき、これを切断面とするようなN次元進行波が存在することを証明し、その安定性を示した。これにより Allen-Cahn 方程式および競合拡散方程式系など拡散係数が等方で異方性をもたないモデル方程式において、進行軸に対して非対称な形状をもつ伝播現象が存在することを解明した。

高坂（分担者）は、幾何学的発展方程式の1つである表面拡散方程式によって運動が記述される曲線の挙動に関して研究し、表面拡散方程式に対する進行波解の存在と、その解の凸性と進行速度の関係について研究を行った。

三竹（分担者）は、二宮らと多次元解の形状を捉えるための低次元化手法として、多層

界面方程式の粘性解の存在証明を行った。

また、以下のような研究集会・セミナーを開催し、討論を行った。

- ・ 明治非線型数理セミナー
2014年度は8回,2015年度は13回,2016年度は,16回,2017年度は17回開催した。集中講義形式のもの開催し,より踏み込んだ内容に関して討論を行えるようにした。
- ・ 偏微分方程式岡山小研究集会
2014年12月1日-2日 岡山大学
- ・ Okayama Workshop on Partial Differential Equations
2016年10月29日 岡山大学
- ・ 研究集会「非線形偏微分方程式の非線形偏微分方程式の定性的理論」
2017年9月17日-19日 岡山大学
- ・ Okayama Workshop on Partial Differential Equations
2017年10月28日 岡山大学
- ・ 明治非線型数理セミナー one day workshop
2018年2月22日 明治大学

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 33 件)

1. Y.-Y. Chen, H. Ninomiya and R. Taguchi: Traveling spots on multi-dimensional excitable media, Journal of Elliptic and Parabolic Equations, 1, (2015) pp. 281-305 (査読有)
2. Y. Tanaka, M. Mimura and H. Ninomiya: A reaction diffusion model for understanding phyllotactic formation, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 33 (2016), pp. 183-205 (査読有)
3. H. Monobe and H. Ninomiya: Traveling wave solutions with convex domains for a free boundary problem, Discrete and continuous dynamical systems. Ser. A, Volume 37, Issue 2, (2017) pp 905--914 (査読有)
4. Y.-Y. Chen, J.-S. Guo and H. Ninomiya: Existence of rotating spots with spatially dependent feedback in the plane in a wave front interaction model, Journal of Dynamics and Differential Equations, 29, Issue 2, (2017) pp. 465-483 (査読有)
5. H. Ninomiya and C.-H. Wu: Traveling curved waves in two dimensional excitable media, SIAM J. Mathematical Analysis, Vol. 49, No. 2, (2017) pp. 777--817 (査読有)
6. H. Ninomiya, Y. Tanaka and H. Yamamoto: Reaction, diffusion and non-local interaction, Journal of Mathematical Biology, 75, Issue 5, (2017) pp. 1203--1233 (査読有)
7. M. Iida, H. Monobe, H. Murakawa and H. Ninomiya: Vanishing, moving and immovable interfaces in fast reaction limits, Journal of Differential Equations, 263.5 (2017), pp. 2715-2735 (査読有)
8. Y. Tanaka, H. Yamamoto, and H. Ninomiya: Mathematical approach to nonlocal interactions using a reaction-diffusion system. Development, Growth & Differentiation (2017), 8 pages (査読有)
9. Y.-Y. Chen, J.-S. Guo, H. Ninomiya and C.-H. Yao: Entire solutions originating from monotone fronts to the Allen-Cahn equation, accepted to Physica D (査読有)
10. H. Ninomiya, Y. Tanaka and H. Yamamoto: Reaction-diffusion approximation of nonlocal interactions using Jacobi polynomials, accepted to Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. (査読有)
11. M. Taniguchi, An (N-1)-dimensional convex compact set gives an N-dimensional traveling front in the Allen--Cahn equation, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 47, No. 1 (2015), pp. 455-476 (査読有)
12. M. Taniguchi, Convex compact sets in \mathbb{R}^{N-1} give traveling fronts of cooperation-diffusion systems in \mathbb{R}^N , Journal of Differential Equations, Vol. 260, No. 5 (2016), pp. 4301-4338 (査読有)
13. T. Ishiwata and S. Yazaki, Structure-preserving numerical scheme for a generalized area-preserving crystalline curvature flow, Computer Methods in Materials Science 17 (2017) 122--135. ISSN: 1641-8581(査読有)
14. K. Sakakibara and S. Yazaki, Method of fundamental solutions with weighted average condition and dummy points, JSIAM Lett. 9 (2017) 41-44. (査読有)
15. H. Tani and S. Yazaki, Instability of a free boundary in a Hele-Shaw cell with sink/source and its parameter dependence, JSIAM Lett. 9 (2017) 37-40 (査読有)
16. K. Sakakibara and S. Yazaki, On invariance of schemes in the method of

- fundamental solutions, *Appl. Math. Lett.* 73 (2017) 16-21 (査読有)
17. P. Paus and S. Yazaki, Exact solution for dislocation bowing and a posteriori numerical technique for dislocation touching-splitting, *JSIAM Lett.* 7 (2015) 57-60 (査読有)
 18. K. Osaki, H. Satoh and S. Yazaki, Towards modelling spiral motion of open plane curves, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, 8,1009-1022 (2015) (査読有)
 19. S. Yazaki, A numerical scheme for the Hele-Shaw flow with a time-dependent gap by a curvature adjusted method, *Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations*, *Adv. Stud. Pure Math.*, 64, Math. Soc. Japan, Tokyo (2015) 253-261. (査読有)
 20. Y. Kohsaka, On the criteria for the stability of unduloids, *RIMS Kōkyūroku Bessatsu*, B63, 2017, 169-194(査読有)
 21. Y. Kohsaka, Stability Analysis of Delaunay Surfaces as Steady States for the Surface Diffusion Equation, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 176 (2016) 121-148 (査読有)
 22. H. Mitake and H. V. Tran, Homogenization of weakly coupled systems of Hamilton-Jacobi equations with fast switching rates, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 211 (2014), no. 3,733-769 (査読有)
 23. F. Cagnetti, D. A. Gomes, H. Mitake, and H. V. Tran, A new method for large time behavior of degenerate viscous Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 32 (2015), 183-200 (査読有)
 24. H. Mitake, and H. V. Tran, Weakly coupled systems of the infinity Laplace equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 369 (2017) 1773-1795 (査読有)
 25. H. Mitake, and H. V. Tran, Large-time behavior for obstacle problems for degenerate viscous Hamilton-Jacobi equations, *Calc. Var. Partial Differential Equations.* 54, (2015), no. 2, 2039-2058 (査読有)
 26. D. Gomes, and H. Mitake, Existence for stationary mean field games with quadratic Hamiltonians with congestion, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 22 (2015), no. 6, 1897-1910 (査読有)
 27. H. Mitake, A. Siconolfi, H. V. Tran, N. Yamada, A Lagrangian approach to weakly coupled Hamilton-Jacobi systems, *SIAM J. Math. Anal.* 48 (2016), 821-846 (査読有)
 28. H. Mitake, H. V. Tran, Selection problems for a discount degenerate viscous Hamilton-Jacobi equation, *Adv. Math.* 306 (2017), 684-703 (査読有)
 29. Y. Giga, H. Mitake, H. V. Tran, On asymptotic speed of solutions to level-set mean curvature flow equations with driving and source terms, *SIAM J. Math. Anal.* 48 (2016), 3515-3546 (査読有)
 30. H. Mitake, H. V. Tran, On uniqueness sets of additive eigenvalue problems and applications, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.* (査読有)
 31. H. Mitake, K. Soga, Weak KAM theory for discount Hamilton-Jacobi equations and its application, to appear in *Calc. Var. Partial Differential Equations.* (査読有)
 32. H. Monobe and C.-H. Wu, On a free boundary problem for a reaction-diffusion-advection logistic model in heterogeneous environment, *Journal of Differential Equations*, 261, (2016), pp. 6144-6177 (査読有)
 33. H. Monobe, On the existence of two stationary solutions for a free boundary problem describing cell motility, *Tamkang Journal of Mathematics*, 47, (2016), pp. 39-50 (査読有)
- [学会発表](計 35 件)
1. H. Ninomiya, Traveling spots and obstacle-induced spirals in an excitable medium, July 7-11, 2014, The 10th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations, and Applications: SS12, Universidad Autónoma de Madrid, Spain
 2. H. Ninomiya, Dynamics of a free boundary problem arising from excitable systems, Sixth Euro-Japanese Workshop on Blow-up, Tokyo Institute of Technology, September 1-5, 2014
 3. 二宮広和:心室細動の数学的理解に向けて, 第34回医療情報連合大会「生物および身体の数理的理解と数理による医療情報へのアプローチ」2014年11月6日~8日, 幕張メッセ
 4. H. Ninomiya: Obstacle-induced spiral formation in excitable media and

- ventricular fibrillation, ALGORITHM, Conference on Scientific Computing, Vysoke Tatry, Podbanske, March 13-18, 2016
5. H. Ninomiya: Layered Interface Systems and its Dynamics, 11th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Orlando USA, July 1-5, 2016
 6. H. Ninomiya: Obstacle-induced spiral in two-dimensional excitable media, ミクロナ振る舞いと集団のパターン形成に係る階層的構造の解明, Sept. 12-14, 2016, RIMS, Kyoto, Japan
 7. H. Ninomiya: Traveling waves of free boundary problems, NCTS Workshop on Nonlinear Differential Equations: Theory and Application, Nov. 18, 2016
 8. H. Ninomiya: Reaction-diffusion approximations of non-local evolutionary equation and wave equation, International Conference on Elliptic and Parabolic Problems, May 22-26, 2017, Gaeta, Italy
 9. H. Ninomiya, Dynamics of waves in excitable media, 日本数理生物学会, Oct. 7, 2017, Hokkaido University, Japan
 10. H. Ninomiya, Dynamics of waves in excitable media, The 3rd conference on Differential Geometry and Differential equations, Renmin University of China, Beijing, Oct. 20-22, 2017
 11. H. Ninomiya, Dynamics of interface-reaction equations, International Conference on Nonlinear Analysis and its Applications, Tamkang University, March, 23-24, 2018
 12. 二宮広和: 反応拡散方程式の進行波解と全域解, 日本数学会, March 20, 2018, 東京大学
 13. 二宮広和: 興奮場における N-パルスダイナミクス, 2017 年度 明治非線型数理セミナー one day workshop, 明治大学, 2019 年 2 月 22 日
 14. 飯田雅人, 急速反応極限の接合漸近展開による再考, 2017 年度 明治非線型数理セミナー one day workshop, 明治大学, 2019 年 2 月 22 日
 15. M. Taniguchi, Convex compact sets in R^{N-1} give traveling fronts in R^N in cooperative diffusion systems, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madrid, Spain, July 07-11, 2014
 16. 谷口雅治, Convex compact sets in R^{N-1} give traveling fronts of cooperation-diffusion systems in R^N , 日本数学会秋季総合分科会函数方程式分科会, 2014 年 9 月 28 日
 17. M. Taniguchi, Multidimensional traveling fronts in reaction-diffusion equations, The Tenth East China Partial Differential Equations Conference Center for Partial Differential Equations, East China Normal University, Shanghai, China, from June 15-18, 2015
 18. M. Taniguchi, Multidimensional traveling fronts in reaction-diffusion equations, 2015 KAIST CMC Mathematical Biology Conference on Cross-diffusion, chemotaxis, and related problems, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejeon, Korea, July 8-10, 2015
 19. M. Taniguchi, An (N-1)-dimensional convex compact set gives an N-dimensional traveling front, 11th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Orlando, USA, July 1-5, 2016
 20. M. Taniguchi, An (N-1)-dimensional convex compact set gives an N-dimensional traveling front, International Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society, Seoul National University, October 20-23, 2016
 21. M. Taniguchi, An (N-1)-dimensional convex compact set gives an N-dimensional traveling front, Minisymposium MS-12 "Nonlinear parabolic equations, Equadiff2017, July 24-28, 2017, Bratislava, Slovakia
 22. 谷口雅治, An (N-1)-dimensional convex compact set gives an N-dimensional traveling front in the Allen-Cahn equation, 2017 年度 明治非線型数理セミナー one day workshop, 明治大学, 2019 年 2 月 22 日
 23. K. Sakakibara and S. Yazaki, Numerical experiments of the charge simulation method for Hele-Shaw flows, 2nd Slovak-Japan conference on applied mathematics, Radzovce - Obrucna, Cerova vrchovina, Slovakia (2014.9.15).
 24. S. Yazaki, A direct approach to image segmentation, Session organizer: Fluid flow, transport phenomena and free boundary problems in complex geometries - Hele-Shaw flow and image

- segmentation, Algoritmy 2016 at Podbanske (2016.3.15).
25. 矢崎成俊, 時間発展する曲線の数値計算法, 明治非線型数理セミナー one day workshop @ 明治大学中野キャンパス (2018.2.22) .
 26. Y. Kohsaka, On the criteria for the stability of the axisymmetric CMC surfaces, 4th Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 2015, 招待, 国際学会
 27. Y. Kohsaka, Analysis of stability of the CMC surfaces via the surface diffusion equation, Summer School on multiscale and geometric analysis, 2015, 招待, 国際学会
 28. Y. Kohsaka, Stability of Delaunay surfaces as the steady states for the surface diffusion equation, Geometric aspects on capillary problems and related topics, 2015, 招待, 国際学会
 29. Y. Kohsaka, Stability analysis of steady states for surface diffusion equation, Workshop on nonlinear partial differential equations and related topics, 2016, 招待, 国際学会
 30. 高坂良史, 体積保存性型幾何学的発展方程式の解の挙動について, 2017 年度 明治非線型数理セミナー one day workshop, 明治大学, 2019 年 2 月 22 日
 31. 三竹大寿, Derivation of multi-layered interface system and its application, Nonlinear PDE for Future Applications -Optimal Control and PDE-, 2017, 招待
 32. 三竹大寿, Stochastic Mather measure and its applications, Large scale properties of partial differential equations with random coefficients, RIMS 合宿型セミナー, (2017), 招待
 33. 三竹大寿, Derivation of multi-layered interface system and its application, PDE Geometric Analysis seminar in Univ. Madison-Wisconsin, (2017) 国際学会
 34. 三竹大寿, 多層的界面方程式の導出について, 2017 年度 明治非線型数理セミナー one day workshop, 明治大学, 2019 年 2 月 22 日
 35. 物部治徳, On traveling wave solutions to curvature flows with external driving force, International Conference on Reaction-Diffusion Equations and their Applications to the Life, Social and Physical Sciences, (2016)

〔図書〕(計 5 件)

1. 二宮広和: 侵入・伝播と拡散方程式, 共立出版 (2014)
2. 矢崎成俊, 界面現象と曲線の微積分, 共立出版 (2016)
3. 矢崎成俊, 実験数学読本: 真剣に遊ぶ数理実験から大学数学へ, 日本評論社 (2016)
4. 長岡亮介, 渡辺浩, 矢崎成俊, 宮部賢志, 新しい微積分上, 下, 講談社 (2017)
5. N. Q. Le and H. Mitake and H. V. Tran, Dynamical and Geometric Aspects of Hamilton-Jacobi and Linearized Monge-Ampere Equations, Springer, (2017)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.isc.meiji.ac.jp/~nino38/index-en.html>

<http://www.isc.meiji.ac.jp/~syazaki/mik-past.html>

<http://www.isc.meiji.ac.jp/~syazaki/activities/activities.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

二宮 広和 (NINOMIYA, Hiroyasu)

明治大学, 総合数理学部, 専任教授

研究者番号: 90251610

(2) 研究分担者

飯田 雅人 (IIDA, Masato)

宮崎大学, 工学部, 教授

研究者番号: 00242264

谷口 雅治 (TANIGUCHI, Masaharu)

岡山大学, 異分野基礎科学研究所, 教授

研究者番号: 30260623

矢崎 成俊 (YAZAKI, Shigetoshi)

明治大学, 理工学部, 専任教授

研究者番号: 00323874

高坂 良史 (KOHSAKA, Yoshihito)

神戸大学, 海事科学研究科, 准教授

研究者番号: 00360967

三竹 大寿 (MITAKE, Hiroyoshi)

広島大学, 工学研究科, 准教授

研究者番号: 90631979

(3) 連携研究者

物部治徳 (MONOBE, Harunori)

岡山大学, 異分野基礎科学研究所, 准教授

研究者番号: 20635809