

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26330012

研究課題名(和文) グラフ最適化問題に対する高速アルゴリズムの理論設計と実装開発

研究課題名(英文) Design Theory and Implementation of Fast Algorithms to Graph Optimization

研究代表者

永持 仁 (Hiroshi, Nagamochi)

京都大学・情報学研究科・教授

研究者番号：70202231

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、グラフ上の離散最適化において代表的な問題である、独立点集合問題、次数制限グラフ上のトラベリングセールスマン問題、帰還点集合問題、枝支配集合問題に対して、多項式領域厳密アルゴリズムを分枝アルゴリズムに基づき設計し、これらの時間計算量の理論的上界が現在、最良のものであることを証明した。この他、枝支配集合問題に対する多項式領域厳密アルゴリズムの設計、次数制限グラフ分割問題に対するカーネル構成アルゴリズムなどの設計、グラフ構造上の施設配置ゲームに対する結託耐性メカニズムの設計を行った。

研究成果の概要(英文)：In this research, we designed polynomial-space exact algorithms based on the branching method to several representative problems in discrete optimization such as the independent set problem, the traveling salesman problem in degree-bounded graphs, the feedback vertex set problem, the edge dominating set problem, and analyzed that upper bounds on the time complexities of these algorithms are currently best among the existing algorithms. We also designed an algorithm for constructing a kernel to the problem of partitioning a graph into two degree-bounded graphs, and a strategy-proof mechanism to the facility location game problem.

研究分野：離散最適化

キーワード：情報工学 アルゴリズム 高速コンピューティング 数理計画 最適化 グラフ理論 計算量 ネットワーク構造

## 1. 研究開始当初の背景

現代社会を動かしているアルゴリズムのうち、本研究では、情報学・システム工学上の諸問題を取り扱う。スケジューリング、ネットワークング、マイニング、ケモインフォマテクスなどに現れる多くの問題は、離散構造を有し、離散最適化問題として定式化することができる。離散最適化問題への定式化によって、問題の持つ計算の複雑さの解明や、高度な数学的手続きの設計が行えるようになる。しかし、トラベリングセールスマン問題を始めとして現実問題に現れる離散最適化問題の殆ど多くは NP-困難問題であり、入力データ長の多項式的な計算手間では最適解が得られないと信じられており、指数時間の計算量のアルゴリズムが設計されている。

これまで指数時間アルゴリズムの研究は、1970年代以降、多項式時間アルゴリズムの発見の趨勢の中で遅れがちであったが、近年、高性能化するコンピュータの進歩を受けて、厳密最適解を求めることが必要な応用分野では指数時間アルゴリズムの高速化の課題が以前にも増して重要になってきている。最近では、分枝限定法、動的計画法、分割統治法などの代表的指数時間アルゴリズムを設計するための理論とその計算量解析技法が整備されるとともに、パラメータを導入して問題の解きやすさを新しい側面で解析する研究手法 FPT (Fixed Parameter Tractable) が現れ、指数時間アルゴリズムの研究が理論的、実用的観点から大きく掘り下げられている。離散最適化問題が多項式時間で解けるための一つの大きな根拠が問題の持つ劣モジュラ性であることは知られていたが、最近では、NP-困難な離散最適化問題が FPT であることを証明するためにも劣モジュラ性が利用されている例が多く報告され始めている。このことから、指数時間アルゴリズムを設計する一般理論に、劣モジュラ性を持つ問題構造を組み合わせた、汎用かつ高速な指数時間アル

ゴリズムの設計手法の確立が今後期待される。

## 2. 研究の目的

現代社会において生じる情報工学的諸問題の多くは離散構造を有しており、これらを離散最適化問題として定式化することで高度な数学的解法の適用が可能になる。しかし一般に、分枝限定法や整数計画法などの汎用的手法を直接適用するだけでは、効率の良いアルゴリズムを得ることが期待できない。本研究では、広範な現実問題が共有するグラフ構造や劣モジュラ構造を抽出し、それらの特性を利用したアルゴリズムの設計の理論の構築を行う。提案するアルゴリズムの計算機実装も行い、理論と実用的側面を橋渡しする工学的技術についても検討を行い、汎用性が高く、かつ、効率や品質にも理論保証が得られるようなアルゴリズム設計技術の確立を目指す。

本研究では、広範な現実問題が共有するグラフ構造や劣モジュラ構造を利用した指数時間厳密アルゴリズム、近似アルゴリズムの設計を行うとともに、計算機実験による有効性の確認、アルゴリズム設計のための一般理論の拡充を行う。この目的を達成するために、以下の(1)～(5)の事項について研究を行う。

(1) グラフ問題に対するアルゴリズムの設計・改良、(2) 一般の指数時間アルゴリズムの高速化手法、計算量解析手法の開発、(3) 劣モジュラ性を利用した指数時間アルゴリズムの一般的設計手法、(4) 最近のアルゴリズム設計手法を取り入れた近似アルゴリズムの設計、(5) 提案アルゴリズムの実装と計算機実験を通じた分析。

## 3. 研究の方法

本研究では、広範な現実問題が共有するグラフ構造や劣モジュラ構造を抽出することによって、汎用性が高く、かつ、効率や品質にも理論保証が得られるようなアルゴリズム

設計技術の確立を目指す。その目的を達成するために、以下の事項を検討していく。

(1) グラフ問題に対するアルゴリズムの設計・改良、(2) 一般の指数時間アルゴリズムの高速化手法、計算量解析手法の開発、(3) 劣モジュラ性を利用した指数時間アルゴリズムの一般的設計手法、(4) 最近のアルゴリズム設計手法を取り入れた近似アルゴリズムの設計、(5) 提案アルゴリズムの実装と計算機実験を通じた分析。(1)では個々の問題に対する新しいアルゴリズムの設計、従来のアルゴリズムの改良を行う。(2)では(1)を通じて得られた設計・解析手法を一般的な形で利用するための議論を行う。(3)では、多くの離散最適化問題が内包する劣モジュラ性を一般の指数時間アルゴリズムの設計法に組み込んだ枠組みの開発を試みる。(4)では、これまで指数時間アルゴリズムのために開発された設計手法を近似アルゴリズムの設計に利用する可能性を探る。最後に、(5)では提案するアルゴリズムを実際に計算機上で実装し、アルゴリズムの実装上の観点から設計法へのフィードバックを行う。

#### 4. 研究成果

巡回セールスマン問題、独立点集合問題、節点被覆問題、支配枝集合問題は、グラフに関する NP-困難な最適化問題の中で古典的な問題として知られており、これらを厳密に解くためには、動的計画法に基づく指数領域アルゴリズムあるいは分枝限定法に基づく多項式領域アルゴリズムが用いられる。

本研究ではグラフの最大次数が 3、4、5、6 に制限された  $n$  節点グラフ上の巡回セールスマン問題、グラフの最大次数が 5 である  $n$  節点グラフ上の独立点集合問題に対して、それぞれ 計算量の上界が  $O(1.2312^n)$ 、 $O(1.692^n)$ 、 $O(2.4723^n)$ 、 $O(3.0335^n)$ 、 $O(1.1736^n)$  である分枝限定法アルゴリズムを設計した。これらは多項式領域アルゴリズムの計算量としてはいずれも現在最良のも

のである。最大次数 3 のグラフ上の最大独立点集合に対しては研究代表者らにより、理論的計算量が現時点で最良であるアルゴリズムが提案されているが、研究代表者の研究室の学生の修士論文として、このアルゴリズムの実装と計算機による性能評価を行った。

支配枝集合問題に対して、解のサイズ  $k$  に関する FPT アルゴリズムの計算時間を従来最良であった  $O(2.3147^k)$  を、本研究では、 $O(2.2351^k)$  へ大きく短縮した。

また、FPT アルゴリズムを持つ節点被覆問題を含む形で、新たに、節点の次数の上下限を満足する部分グラフの抽出問題を定式化し、これに対して FPT アルゴリズムが存在することをそのカーネルの構築法とともに理論的に証明した。この結果は、支配枝集合問題にある制約を課した厳密マッチング問題が FPT アルゴリズムを持つという従来の結果も含んでおり、次数制約を持つ関連の問題の複雑度を決定する上で役立つ結果である。

グラフの平面描画の分野において、平面的なグラフを 2 枚の半平面に、点は 2 半平面の共通軸に並べ、各半平面内で枝交差が生じないように埋め込めるかどうかという問題は一般には NP-困難であるが、半平面へ割り当てる枝集合が予め指定されていれば、その埋め込み可能性を線形時間判定する方法が研究代表者らにより得られていた。しかし、従来の方法は相当に複雑であり、本研究では、平面構造に基づく新しい性質を利用し、簡便なアルゴリズムと通常の平面判定への帰着という二種の方法を提案することができた。この他、与えられたグラフを平面上に、すべての節点が外面に現れ、かつ各枝あたり 2 個までしか枝交差を持たないように埋め込めることができるかを判定する線形時間のアルゴリズムを設計した。この結果は、従来、グラフの平面への交差無し埋め込み、各枝高々 1 回の交差を許す 1-平面埋め込みの研究結果をさらに一步前進させるものである。

グラフ上の忌避型施設配置ゲーム問題に対する戦略耐性メカニズムの数学的な基本性質をいくつか明らかにした。木状構造の距離空間での施設の配置候補地の集合が提携戦略耐性メカニズムを持つための必要十分条件を明らかにした。また、直線構造の距離空間におけるメカニズムの戦略耐性の定義の緩和とメカニズムの達成できる全体利得との間に成り立つトレードオフの関係を導出した。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

Mingyu Xiao, Hiroshi Nagamochi  
Complexity and kernels for bipartition into degree-bounded induced graphs, Theoretical Computer Science 659 2017 72-82  
DOI: 10.1007/978-3-319-13075-0\_34  
査読有

Morito Oomine, Aleksandar Shurbevski, Hiroshi Nagamochi  
Parameterization of Strategy-Proof Mechanisms in the Obnoxious Facility Game, Journal of Graph Algorithms and Applications 21(3) 2017 247-263  
DOI: 10.7155/jgaa.00415  
査読有

Ken Iwaide, Hiroshi Nagamochi  
An Exact Algorithm for Lowest Edge Dominating Set, IEICE Transactions Information and Systems Vol. E100. D, No. 3, 2017 414 - 421  
DOI: 10.1587/transinf.2016FCP0005  
査読有

Ken Iwaide, Hiroshi Nagamochi  
An Improved Algorithm for Parameterized Edge Dominating Set Problem, J. Graph Algorithms Appl. 20(1): 23-58 (2016)  
DOI: 10.1007/978-3-319-15612-5\_21  
査読有

Mingyu Xiao, Hiroshi Nagamochi  
An Exact Algorithm for TSP in Degree-3 Graphs Via Circuit Procedure and Amortization on Connectivity Structure, Algorithmica 74(2): 713-741 (2016)  
DOI: 10.1007/s00453-015-9970-4  
査読有

Mingyu Xiao, Hiroshi Nagamochi  
An exact algorithm for maximum independent set in degree-5 graphs Discrete Applied Mathematics 199: 137-155 (2016)  
DOI: 10.1007/978-3-642-38756-2\_10  
査読有

Mingyu Xiao, Hiroshi Nagamochi:  
An Improved Exact Algorithm for TSP in Graphs of Maximum Degree 4 Theory of Computing Systems, 58(2): 241-272 (2016)  
DOI: 10.1007/s00224-015-9612-x  
査読有

Morito Oomine, Hiroshi Nagamochi  
Characterizing Output Locations of GSP Mechanisms to Obnoxious Facility Game in Trees IEICE Transactions Inf. and Syst., vol. E99-D, no. 3, March 2016.  
DOI 10.1587/transinf.2015FCP0008  
査読有

Masataka Ikeda, Hiroshi Nagamochi:  
Some Reduction Procedure for Computign  
Pathwidth of Undirected Graphs,  
IEICE Transactions 98-D(3),  
No.3, 503-511 (2015)  
DOI: 10.1587/transinf.2014FCP0012  
査読有

[学会発表](計 14 件)

Mingyu Xiao, Hiroshi Nagamochi  
A Linear-time Algorithm for Integral  
Multiterminal Flows in Trees  
The 27th International Symposium on  
Algorithm and Computation,  
December 12, 2016, Sydney, Australia

Seok-Hee Hong, Hiroshi Nagamochi  
Re-embedding a 1-Plane Graph into a  
Straight-line Drawing in Linear Time  
The 24th International Symposium on Graph  
Drawing and Network Visualization,  
September 20, 2016 Athens, Greece

Mohd Shahrizan Bin Othman, Aleksandar  
Shurbevski, Yoshiyuki Karuno, Hiroshi  
Nagamochi  
Routing Problems with Last-Stretch  
Delivery  
The 19th Japan Conference on Discrete and  
Computational Geometry and Graphs (JCDCGG  
2016),  
September 3, 2016 Tokyo, Japan,

Norhazwani Md Yunos, A. Shurbevski, H.  
Nagamochi:  
A Polynomial-space Exact Algorithm for the  
TSP in Degree-8 Graphs  
The 19th Japan-Korea Joint Workshop on  
Algorithms and Computation,  
August 30, 2016 Hakodate, Japan

Mohd Shahrizan Bin Othman, Aleksandar  
Shurbevski, Hiroshi Nagamochi  
Exact Algorithms for the Bipartite  
Traveling Salesman Problem  
The 9th Annual Meeting of Asian  
Association for Algorithms and  
Computation,  
May16, 2016, Taipei, Taiwan

Norhazwani Md Yunos, A. Shurbevski, H.  
Nagamochi  
A Polynomial-space Exact Algorithm for the  
TSP in Degree-7 Graphs  
The 9th Annual Meeting of Asian  
Association for Algorithms and  
Computation,  
May 16, 2016, Taipei, Taiwan

Morito Oomine, Aleksandar Shurbevski,  
Hiroshi Nagamochi  
Parameterization of Strategy-Proof  
Mechanisms in the Obnoxious Facility Game,  
WALCOM 2016,  
March 30, 2016 Kathmandu, Nepal

Norhazwani Md Yunos, A. Shurbevski, H.  
Nagamochi:  
A Polynomial-Space Exact Algorithm for TSP  
in Degree-6 Graphs  
The 18th Japan Conference on Discrete and  
Computational Geometry and Graphs (JCDCGG  
2015),  
Kyoto, Japan, September 16, 2015

Fei He, Hiroshi Nagamochi:  
A Method for Generating Colorings over  
Graph Automorphism,  
The 12th International Symposium on  
Operations Research and its Applications  
(ISORA 2015),

Luoyang, China, August 22, 2015,

Norhazwani Md Yunos, A. Shurbevski, H. Nagamochi:

A Polynomial-Space Exact Algorithm for TSP in Degree-5 Graphs

The 12th International Symposium on Operations Research and its Applications (ISORA 2015), Luoyang, China, August 22, 2015,

Seok-Hee Hong, Hiroshi Nagamochi:  
Testing Full Outer-2-Planarity in Linear Time,  
41st International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science  
June 18, 2015, Garching, Germany.

Ken Iwaide, Hiroshi Nagamochi:  
An Improved Algorithm for Parameterized Edge Dominating Set Problem.  
WALCOM 2015  
February 27, 2015. Dhaka Bangladesh

Mingyu Xiao, Hiroshi Nagamochi:  
Complexity and Kernels for Bipartition into Degree-bounded Induced Graphs.  
ISAAC 2014  
Jeonju, Korea December 16, 2014

Seok-Hee Hong, Hiroshi Nagamochi:  
Simpler Algorithms for Testing Two-Page Book Embedding of Partitioned Graphs.  
COCOON 2014,  
Georgia, USA, August 5, 2014

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等  
URL:<http://www-or.amp.i.kyoto-u.ac.jp/members/nag/index-e.html>

#### 6. 研究組織

- (1)研究代表者  
永持 仁 (NAGAMOCHI, Hiroshi)  
京都大学・大学院情報学研究科・教授  
研究者番号：70202231
- (2)研究分担者  
趙 亮 (ZHAO, Liang)  
京都大学・総合生存学館・准教授  
研究者番号：90344902

(3)連携研究者  
( )

研究者番号：

(4)研究協力者  
( )