様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：２５１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６３３００１８

研究課題名（和文）制約付きグラフ同型性判定問題に関する研究

研究課題名（英文）A Study on The Graph Isomorphism with Restriction

研究代表者
名古屋　孝幸（Nagoya, Takayuki）

公立鳥取環境大学・人間形成教育センター・准教授

研究者番号：９０３４９７９６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,300,000円

研究成果の概要（和文）：制約付きグラフ同型性判定問題は，グラフ同型性判定問題を拡張した問題であり，NP-完全であることが知られている．
本研究では，入力グラフを部分k-木に制限した場合，この問題が多項式時間で解けることを示した．また，入力として与えられる二項関係をある種の推移的性質を持つ場合に制限することで，より高速に実装できることを示した．更に，Prefix Set of GIと呼ばれる問題に対しては，入力として与えられる部分写像の定義域のサイズが大きいほど高速であるようなアルゴリズムを設計した．

研究成果の概要（英文）：The Graph Isomrophism with Restriction is an NP-complete problem that is an extension of the well-known Graph Isomorphism Problem.
In this study, we have shown that the problem can be solved in polynomial-time when the given graphs are partial k-trees. The algorithm can be implemented more efficiently if the given binary relation have a transitive property. Furthermore, we designed an algorithm to solve the Prefix Set of Graph Isomorphism whose time complexity can be reduced depending on the size of domain of the given partial function.

研究分野：情報学基礎

キーワード：アルゴリズム理論　計算量理論　グラフ理論　制約付きグラフ同型性判定問題

１．研究開始当初の背景

グラフ同型性判定問題（GI）は，2 つのグラフ G と H が与えられたとき，G から H への同型写像が存在するか否かを問う問題である．ここで，G の頂点集合 V(G)から H の頂点集合 V(H)への全単射 f が同型写像であるとは，任意の 2 頂点 u, v ∊ V(G)に対して u と v の間に辺があるとき，かつそのときに限り f(u)と f(v)の間にも辺があるときをいう．

図１に同型なグラフの例を示す．頂点 2 と頂点 5 を入れ替え，その他は同じラベルの頂点に写す V(G)から V(H)への全単射は G から H への同型写像である．

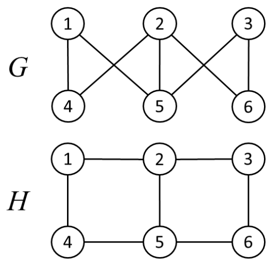

図 1　同型なグラフ

GI によく似た問題としてグラフ自己同型性判定問題（GA）がある．この問題は，G から G への同型写像，すなわち G 上の非自明な自己同型写像が存在するか否かを問う問題である. GI との関係から活発に研究がなされている問題である．

GI や GA は，グラフに関する問題の中で最も基本的な問題の一つであり，それ故様々な問題を解くための前処理としても必要となる，応用範囲の広い重要な問題である．しかしながら，その性質には不明な点が多い．多項式時間で解けるのか NP-完全となるかすら分かっておらず，多項式時間と NP-完全の間の計算量を持つ判定問題の候補として知られる．このような問題は稀であり，P≠NP 問題といった重要な未解決問題との関係から理論的にも重要な問題である．また，GI と GA の計算量が等価か否かはよく知られた未解決問題であり, GI が GA よりも難しいことを予想させる理論的な状況証拠がいくつか存在する．現在までに分かっている多項式時間(P)，GA と多項式時間等価な判定問題の集合(GA-完全)，GI と多項式時間等価な判定問題の集合(GI-完全)，および NP-完全の間の計算複雑さの関係は次式で表すことができる．

P ≦ GA-完全 ≦ GI-完全 ≦ NP-完全

GI や GA の計算複雑さは，問題の定義を少し変更しただけで大きく変わることが知られている．たとえば，指定された 1 つの頂点を動かす自己同型写像が存在するか否かを問う問題は GI-完全となり，全ての頂点を動かす自己同型写像が存在するか否かを問う問題は NP-完全となる．しかしながら，なぜ計算量が変わるのか，その本質的な理由は分かっていない．そのため，GI や GA に関連した問題の研究が盛んになされている．これらの問題に対する興味は，その問題が多項式時間で解けるのか，GA-完全となるのか，GI-完全となるのか，あるいは NP-完全となるのかを明らかにすることである．それにより，P，GA-完全，GI-完全，および NP-完全の間にどのような性質の違いがあるのか，問題の難しさが変わる本質的な原因を解明するための手がかりとなることが期待できる．

制約付きグラフ同型性判定問題および制約付きグラフ自己同型性判定問題は，GI や GA を拡張した問題として提案された．制約付きグラフ同型性判定問題は，2 つのグラフ G と H および関係 R⊆V(G)×V(H)が与えられたとき，G から H への同型写像 f で，任意の頂点 v ∊ V(G)に対して(v, f(v)) ∉ R を満たすもの，すなわち R の要素を避ける同型写像が存在するか否かを問う問題である．この問題では，関係 R を用いることで，解として認める全単射に制約を与えることができる．制約付きグラフ自己同型性判定問題も同様に，関係 R の要素を避ける自己同型写像が存在するか否かを判定する問題として定義される．これらの問題は，制約を満たしつつグラフの構造が一致するか否かを判定することから，GI や GA より柔軟性が高く，応用範囲も広い．残念ながら，どちらも NP-完全であることが証明されており，一般の入力に対する効率的なアルゴリズムは期待できない．しかしながら，入力を制限した場合の計算複雑さはほとんど分かっておらず，入力として与えられるグラフや関係 R を制限した場合のこれらの問題が効率よく解けるのであれば，グラフに関する様々な問題への応用が可能となる．また，入力を制限しても効率的なアルゴリズムが期待できないこと，すなわち GI-完全性や NP-完全性が明らかになったとしても，入力の制限方法とそれによる計算複雑さの変化の関係が明らかになれば，P，GA-完全，GI-完全，および NP-完全の間の性質の違いの解明に寄与することが期待できる．

２．研究の目的

本研究の目的は，制約付きグラフ同型性判定問題及びそれに関連した問題の計算量解析を行うことである．特に，入力グラフのクラスを制限した場合について，制約付きグラフ同型性判定問題を解くための効率的なアルゴリズムの設計，あるいは GI-完全，NP-完全といった完全性の証明を目指す．それにより，この問題が効率的に解けるグラフクラスと解けないグラフクラスの境界を明らかにする．また，入力の一部である関係 R を制限した場合についても，その計算複雑さを解析する．関係 R の制限には様々な方法が考えられ，その方法により問題の計算複雑さが変

わることが予想される．関係 R の制限により，解空間の性質がどのように変わり，問題の難しさにどのような影響を与えるのか，関係 R の制限方法と計算複雑さの関係を解析する．

３．研究の方法

入力として与えられるグラフや関係 R を制限した場合について，制約付きグラフ同型性判定問題の計算複雑さを解析する．

(1) グラフクラスの制限

本研究代表者は，k-木と呼ばれるグラフクラスに対しては，制約付きグラフ同型性判定問題が多項式時間で解けることを示した．一方，k-木を含むグラフクラスである部分 k-木については，グラフ同型性判定問題が多項式時間で解けることは知られているが，制約付きグラフ同型性判定問題の計算複雑さは不明である．そこで，以下の方針に従ってこの問題の計算複雑さの解明を目指す．

k-木に対する制約付きグラフ同型性判定問題を解くための多項式時間アルゴリズムは，k-木の木構造を利用した動的計画法にもとづいている．また，動的計画法において部分的な同型写像 f を拡張する際に，“関係 R の f 拡張”という概念を用いて f を拡張する同型写像のみに解を制限する方法を用いている．部分 k-木に対する GI を解くためのアルゴリズムも木構造を利用しており，このアルゴリズムに“関係 R の f 拡張”の概念を適用することで制約付きグラフ同型性判定問題に対する効率的なアルゴリズムを検討する．それがうまくいかない場合は，部分グラフ同型性判定問題の部分 k-木に対する NP-完全性の証明等を参考に，GI-完全性あるいは NP-完全性の証明を検討する．

(2) 関係 R の制限

GA に関連した問題は多数あるが，それらの計算量は様々である．たとえば，RightGA と呼ばれる問題は GA-完全であり，LeftGA と呼ばれる問題は GI-完全である．また，前述のように制約付きグラフ自己同型性判定問題は NP-完全である．GI-完全あるいは NP-完全となる問題が GA よりも難しくなる理由として，GA の持つ良い性質が壊されていることが考えられる．実際，本研究代表者が知る限り，GA に関連した GI-完全問題および NP-完全問題はある種の反射律や推移律を制限できる（成り立たなくする）構造を持っている．制約付きグラフ自己同型性判定問題は反射律や推移律を強く制限できるため，それが NP-完全となる原因である可能性がある．

制約付きグラフ同型性判定問題や制約付きグラフ自己同型性判定問題の入力である関係 R を様々な形で制限し，それにより得られる問題の計算複雑さを解析する．それにより，反射律あるいは推移律といった解空間が持つ性質と計算複雑さの関係を明らかにする．

４．研究成果

部分 k-木に対する制約付きグラフ同型性判定問題の計算量解析を行った．その結果，部分 k-木に対する制約付きグラフ同型性判定問題を解くための多項式時間アルゴリズムが得られた．また，ある種の推移律が成り立つように関係 R を制限することで，更に高速なアルゴリズムが設計できることを示した．また更に，その結果を利用することで，Prefix Set of GI と呼ばれる問題が高速に解けることを示した．以下に，これらの結果の詳細を示す．

(1) 部分 k-木に対するアルゴリズム

部分 k-木に対しては，制約付きグラフ同型性判定問題を解くための多項式時間アルゴリズムが存在することを証明した．このアルゴリズムは部分 k-木の木構造を利用した動的計画法にもとづくものである．動的計画法を適用するにあたり，“関係 R の要素を避ける部分写像”の概念と，“ある部分写像を拡張する部分写像”の概念を同時に扱う必要があった．本研究では，R の要素を避ける部分写像を R-写像として定式化した．また，部分写像 φ に対して関係 r(φ)を注意深く定義することで，φ に矛盾しない部分写像を r(φ)-写像として再定義し，これら 2 つの概念を統一して扱った．これにより，動的計画法において 2 つの概念を同時に扱うことが可能となった．

(2) 制限された関係に対するアルゴリズム

前述の部分 k-木に対するアルゴリズムにおいて，関係 R がある性質を満たすならば，より高速なアルゴリズムが得られることを示した．具体的には，G の任意の部分グラフから H の任意の部分グラフへの任意の R-写像に対して，ある種の推移律が成り立つように R を制限することで，より高速にアルゴリズムを実装できることを示した．

(3) Prefix Set of GI に対するアルゴリズム

上記(2)の事実を利用することで，Prefix Set of GI に対する効率的なアルゴリズムを設計した．この問題は，グラフ G, H 及び V(G) から V(H)への部分写像が与えられたとき，それを拡張するような G から H への同型写像が存在するか否かを問う問題である．入力として与えられた部分写像に対して適切に二項関係を定義することで，この問題を GIR に帰着できることは比較的容易に証明することができる．しかしながら，入力として与えられた部分写像により解となる同型写像の一部が固定されてしまうにもかかわらず，このアルゴリズムの計算量は部分写像の定義域のサイズに依存しない．

本研究では，(2)の性質を満たす二項関係

に対する制約付きグラフ同型性判定問題を利用することで，更に高速なアルゴリズムを設計した．具体的には，G 及び H から，与えられた部分写像の定義域と値域をそれぞれ除いた連結部分グラフからなる集合を考え，2 つの集合の要素間に対して，⑵で示したアルゴリズムを繰り返し適用した．これにより，与えられた部分写像の定義域が大きくなるほど高速に問題を解くことが可能である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① T. Nagoya, Polynomial Time Algorithms for Variants of Graph Matching on Partial k-trees, Foundations of Computing and Decision Sciences, Vol. 41, No. 3, pp. 163-181, 2016, 査読有.

〔学会発表〕（計１件）

① T. Nagoya, Variants of Graph Matching for Tree-like Graphs, International Conference on Big Data Intelligence and Computing, Chengdu, China, December 19-21, 2015, 査読有.

６．研究組織
(1)研究代表者

名古屋　孝幸　（NAGOYA, Takayuki）
公立鳥取環境大学・人間形成教育センター・准教授
研究者番号：９０３４９７９６