

平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26330021

研究課題名(和文) グラフの幅パラメータ計算：コミットメントの理論と実用アルゴリズム開発

研究課題名(英文) Computing width parameters of graphs: theory of commitments and development of practical algorithms

研究代表者

玉木 久夫 (Tamaki, Hisao)

明治大学・理工学部・専任教授

研究者番号：20111354

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：木幅計算の実用的なアルゴリズム開発において、著しい成果を挙げた。木幅厳密計算に対する動的計画法を、正例駆動というモードで実行することにより、主に理論的な意味のみを持つと考えられていたあるとリズムに実用的な価値を持たせることができることを示した。Arnborgらの古典的なアルゴリズムおよびBouchitteとTodincaの動的計画法アルゴリズムを正例駆動化しアルゴリズムの実装コンテストでPACE厳密木幅計算部門で1位および2位を獲得し、またこの成果によってEuropean Symposium on Algorithms 2017 Track Bにおける最優秀論文賞を受賞した。

研究成果の概要(英文)：In practical algorithms for tree width calculation, we have achieved notable results. Applying a positive-instance driven approach to traditional dynamic programming algorithms for treewidth computation, we were able to turn those algorithm, that had been thought as having only theoretical value, into practical algorithms. Both the classical algorithm due to Arnborg et. al. and the one due to Bouchitte and Todinca were modified to work in a positive-instance driven mode and were found to be very effective. Their implementations won the 1st and 2nd prizes in PACE 2016 and PACE 2017, respectively, which are algorithm implementation competitions. The results are also described in a paper submitted to the European Symposium (2017) and won the Best Paper Award in Algorithms in Track B.

研究分野：アルゴリズムと計算の理論

キーワード：treewidth tree-decomposition exact algorithm dynamic programming positive-instance drive  
n safe separator algorithm experiments

## 1. 研究開始当初の背景

グラフに対するパス幅や木幅の概念はグラフ理論における金字塔のひとつであるグラフマイナー理論において導入されその理論のなかで極めて重要な役割をはたしている。それだけでなく、これらの概念は実用的なグラフアルゴリズムの開発においても重要な応用を持つ。パス幅や木幅を求めるアルゴリズムの研究は古くから行われており、1990年代に線形時間の固定パラメータアルゴリズムの発見によって理論的にはひとつの決着を見たと言える。しかしながら、実用上の観点からは、これらの理論的なアルゴリズムは極めて不十分であり、実用的アルゴリズム開発の努力がいまでも続けられている。特に木幅計算については多くの実験的研究があり、ベンチマークサイト TreewidthLIB にはベンチマーク用のグラフ例とそれらに対する最新の計算結果が多数リストされているが、2010年代にはいつてからは、実用アルゴリズム改良に関する大きな進展は見られなかった。

## 2. 研究の目的

木幅およびパス幅に対する実用的なアルゴリズムの開発を理論的な基礎とアルゴリズム実装の両面から行い、幅計算の実用上の限界を大きく広げることを目的として、具体的に次のような目標を掲げた。

パス幅についての目標

(1) コミット可能性の十分条件についての理論を発展させる。

(2) (1) に基づいたアルゴリズムについて実験を行い、最終的には大規模なグラフ（おおまかな目安として1000頂点を超えるもの）についても、厳密なパス幅あるいは精度のよい近似的なパス幅を求めることができるようにする。

木幅についての目標

(1) 木幅に対する頂点の線形順序に基づいた解法（これは既知）における、類似のコミットメントの理論を構築する。

(3) 構築した理論に基づいて実用的なアルゴリズムを開発し、最終的には大規模なグラフ（上と同様）についても、厳密な木幅あるいは精度のよい近似的な木幅を求められるようにする。

## 3. 研究の方法

実験と理論構築の双方を並行して進める。パス幅についての実験は既に開始されている。この実験データを解析してコミットメントの有効な場面を複数特定し、それらの状況におけるコミット可能性の高速な判定法を開発して行く。理論によりコミットメントの正しさと判定アルゴリズムの高速性を保証し、アルゴリズム全体としての性能の評価を実験によって行う。木幅については、コミットメントの理論が全く存在しないために、その理論構築には模索の要素が大きくなる。線形順序に基づいた既知のアルゴリズムの実装から始め、実験を行うなかから、コミットメントの十分条件についてのアイデアを見出す。それらのアイデアに基づいてパス幅の場合に既に得られているのと同様の理論的なアルゴリズムを開発し、パス幅の場合と同様にそれらの実用的な変種を設計して実験により評価する。

## 4. 研究成果

パス幅に対する理論的な成果は、一般の  $n$  頂点有向グラフに対する  $O(1.89^n)$  時間のアルゴリズム（発表論文 [1]）および、 $h$ -準完全有向グラフに対する  $(h + 2k + 1)^{2k} n^{O(1)}$  時間のアルゴリズム（発表論文 [2]）として結実した。ここで、 $k$  はパス幅を表す。また、実用的なパス幅アルゴリズムにおけるコミットメントの効果を実験的に評価しその有用性を明らかにした（発表論文 [3]）。

最大の研究成果は、木幅に対する新しいアルゴリズムを得たことである。これは、Bouchitté と Todinca による動的計画法を、正例駆動型に変形したものであり、

正例駆動型動的計画法の一般論は次のように述べることができる。判定問題に対する動的計画法を考える。動的計画法で考慮する部分問題のそれぞれもやはり判定問題であると仮定する。通常の動的計画法では、まずすべての部分問題を列挙し、次に「ボトムアップ」に各部分問題の答え（YES または NO）を決定して行く。正例駆動型の動的計画法では、答えが YES であるような部分問題のみをボトムアップに構築して

行く。すべての部分問題の列挙が計算時間の面から難しい問題の場合、正例のみの列挙は全く異なる原理によるために、より高速なアルゴリズムに結び付く可能性がある。

Bouchitté と Todinca による動的計画法はそのままで正例駆動で実行できるものではなかったために、正例駆動で実行できる変種を得るための基礎理論を構築した。得られたアルゴリズムを実装し、標準的なベンチマークインスタンスおよびアルゴリズム実装コンテストである PACE2017 のインスタンスにより評価を行った。結果は著しく良好であり、10年以上停滞していた木幅実用計算におけるブレイクスルーとして、発表論文 [6] は ESA 2017 Track B の Best Paper Award を受賞した。この実装は Github リポジトリにおいて公開している。

また応用として、グラフの2層描画についての研究成果をジャーナル論文 [4, 5] としてまとめた。

5. 主な発表論文等（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

### 〔雑誌論文〕（計6件）

- [1] Kenta Kitsunai, Yasuaki Kobayashi, Keita Komuro, Hisao Tamaki, and Toshihiro Tano. Computing directed pathwidth in  $o(1.89^D)$  time. *Algorithmica*, 75(1):138–157, 2016.
- [2] Kenta Kitsunai, Yasuaki Kobayashi, and Hisao Tamaki. On the pathwidth of almost semicomplete digraphs. In *Algorithms - ESA 2015 - 23rd Annual European Symposium, Patras, Greece, September 14-16, 2015, Proceedings*, pages 816–827, 2015.
- [3] Yasuaki Kobayashi, Keita Komuro, and Hisao Tamaki. Search space reduction through commitments in pathwidth computation: An experimental study. In *Experimental Algorithms - 13th International*

*Symposium, SEA 2014, Copenhagen, Denmark, June 29 - July 1, 2014. Proceedings*, pages 388–399, 2014.

- [4] Yasuaki Kobayashi, Hirokazu Maruta, Yusuke Nakae, and Hisao Tamaki. A linear edge kernel for two-layer crossing minimization. *Theor. Comput. Sci.*, 554:74–81, 2014.
- [5] Yasuaki Kobayashi and Hisao Tamaki. A fast and simple subexponential fixed parameter algorithm for one-sided crossing minimization. *Algorithmica*, 72(3):778–790, 2015.
- [6] Hisao Tamaki. Positive-instance driven dynamic programming for treewidth. In *25th Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2017, September 4-6, 2017, Vienna, Austria, pages 68:1–68:13, 2017*.

〔学会発表〕（計4件）

大塚広夢, 小林靖明, 玉木久夫.

交差数の少ない単一ページ描画における固定パラメータアルゴリズム. 研究報告アルゴリズム (AL), 2017(3), AL3:1-7.

大塚広夢, 玉木久夫, 牧井慶太郎.

根付きクリークマイナーアルゴリズムの設計と実験による評価, 研究報告アルゴリズム (AL), 2018(12), AL5:1-6.

大塚広夢, 北村啓介, 玉木久夫.

指定された頂点被覆を根とするクリークマイナー問題, 研究報告アルゴリズム (AL), 2018(12), AL9:1-6.

大塚広夢, 杭田知樹, 佐藤拓人, 玉木久夫.

木幅問題の貪欲解法の巨大グラフを対象とした実験的評価. 研究報告アルゴリズム (AL), 2018(12), AL12:1-6. 〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

○取得状況（計0件）

[その他] ホームページ等木幅アルゴリズム実装  
の Github リポジトリ

<https://github.com/TCS-Meiji/PACE2017-TrackA>

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者 （玉木久夫）

研究者番号：20111354

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし

(4) 研究協力者 なし