

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 21 日現在

機関番号：33917

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26330029

研究課題名(和文) 変分不等式とそれに関連する諸問題に対する手法

研究課題名(英文) Methods for Variational Inequalities and Related Problems

研究代表者

福島 雅夫 (Fukushima, Masao)

南山大学・理工学部・教授

研究者番号：30089114

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：変分不等式は経済、交通、ファイナンス、力学など様々な分野に現れる均衡問題の数理モデルとして重要な役割を果たしている。本研究の目的は、特に相補性問題、最適化問題、ゲーム理論における問題などを含む、変分不等式と密接に関連した諸問題に対して、実用的な方法を開発することである。具体的には、固有値相補性問題、マルチリーダー・フォロワーゲーム、および非線形半正定値計画問題や非線形2次錐計画問題を含む錐最適化問題などに対する方法を本研究において開発した。

研究成果の概要(英文)：Variational inequalities play an important role in mathematical modeling of equilibrium problems that arise in such diverse areas as economics, transportation, finance and mechanics. The purpose of this research is to develop practical methods for problems closely related to variational inequalities, including complementarity problems, optimization problems, and problems in game theory. Specifically, in this research, we developed methods for eigenvalue complementarity problems, multi-leader-follower games, and conic optimization problems such as nonlinear semidefinite programs and nonlinear second-order cone programs.

研究分野：最適化理論

キーワード：均衡問題 最適化問題 変分不等式 相補性問題 ゲーム理論

### 1. 研究開始当初の背景

変分不等式とそのサブクラスである相補性問題は一般に均衡問題と呼ばれる。また、最適化問題の最適性条件が変分不等式あるいは相補性問題の形で表されることから、均衡問題はある意味で最適化問題を包含する問題のクラスということができる。また、均衡問題を制約条件のなかに含む形で定式化された最適化問題も重要な数理モデルとして従来から研究されてきた。そのように、均衡問題は最適化問題と非常に密接に関連しているため、従来から最適化理論の枠組みのなかで主に取り扱われてきた。本研究の開始当初には、変分不等式、相補性問題、錐最適化問題、リーダー・フォロワーゲームなどにおける基本的な問題についてはかなり研究が進んでいたが、半無限変分不等式、固有値相補性問題、非線形2次錐計画問題、非線形半正定値計画問題、マルチリーダー・フォロワーゲームなど重要ではあるが取り扱いが困難な問題については研究の端緒に終わったばかりであり、新しい成果が生まれつつある状態であった。

### 2. 研究の目的

変分不等式とは経済、交通、ゲーム理論、ファイナンス、力学など様々な分野に現れる均衡問題の数理モデルとして重要な役割を果たしている。本研究の目的は、相補性問題、最適化問題、ゲーム理論における問題などを含む、変分不等式と密接に関連した諸問題に対して、実用的な方法を開発することである。特に単調性と呼ばれる好ましい性質を有する均衡問題については従来から体系的な研究が行われ、有効な数値解法の開発など幾多の有用な成果が得られているが、上述のような応用分野において実際に現れる問題を扱う際には、単調性の仮定は厳しすぎる場合が少なくない。本研究の主要な目的は単調性の仮定に縛られることなく、具体的な数理モデルの特性に基づいた実用的な手法を開発することにより、均衡問題の応用領域の拡大に寄与することである。これは、固有値相補性問題やマルチリーダー・フォロワーゲーム等の新しい問題に対する方法の先駆けとなる成果につながるものである。また、数理計画問題の最適性条件において相補性条件が果たす役割は本質的に重要であるが、半正定値計画問題や2次錐計画問題に含まれる錐制約に関する相補性条件の取り扱いは必ずしも容易ではない。これらの事柄に関連する新しい知見を得ることも本研究の目的の一つである。

### 3. 研究の方法

本研究は個々のテーマに応じて国内および海外の研究者らと共同で行った。いずれの場合も、それぞれの具体的な研究テーマに対して、取り組む問題および達成目標を設定したうえで、手法の開発やその理論的性質の解

明、計算実験による有効性の検証を行い、その結果を論文としてまとめた。海外の研究者を含む共同研究者との打ち合わせは主に電子メールを用いて行ったが、必要に応じてミーティングを実施して研究を進めた。

### 4. 研究成果

申請時の研究計画にあげたテーマに加えて、研究の進展に伴い、本研究課題に関連する新たな成果が得られた。それらのうち主要なものを以下に要約する。なお、文中で参照する論文番号は次項「5. 主な発表論文等」の〔雑誌論文〕および〔学会発表〕に記載した論文番号に対応する。

(1) 変分不等式に対する数値解法の開発：変分不等式の制約集合は、通常、線形不等式あるいは有限個の凸不等式で与えられることが多いが、ある種の問題においては無限個の凸不等式によって表される場合もあり、そのような問題は半無限変分不等式と呼ばれる。本研究では半無限変分不等式に対して、外部近似法の考え方に基づく新しい数値解法を開発し、その理論的性質を解明するとともに、計算面の有効性を検証した(雑誌論文[10])。

(2) 固有値相補性問題に対する数値解法の開発：固有値相補性問題は、対象とする行列が対称な場合と非対称の場合に大別される。一般に固有値相補性問題には数多くの解が存在するが、本研究ではまず、対称行列に対する固有値相補性問題の解をすべて求める方法を開発し、その有効性を確認した(雑誌論文[11])。さらに、固有値相補性問題を発展させた2次の固有値相補性問題と呼ばれる問題の解法の開発を行い、その有効性を確認した(雑誌論文[9])。固有値相補性問題を拡張した一般的な閉凸錐上の2次固有値相補性問題に対して、問題を定義する行列の対称性を仮定しない一般的な場合において解の存在を保証する新しい十分条件を与えるとともに、対称行列の2次固有値相補性問題をある種の最適化問題に変換したうえで、特に閉凸錐が2次錐である場合に対して、スペクトル射影勾配法と呼ばれる新しい数値解法を提案し、数値実験によりその有効性を確認した(雑誌論文[6])。また、非負錐に関する相補性条件に基づく通常固有値相補性問題を拡張した2次錐固有値相補性問題に関する研究を行った。まず、2次錐固有値相補性問題が特殊な変分不等式問題に帰着できることを示した上で、それをさらに非線形計画問題に再定式化した。次に、この非線形計画問題に対して半平滑ニュートン法を組み込んだ列挙型アルゴリズムを提案し、計算実験により提案手法が実際に有効であることを示した(雑誌論文[5])。これまで取り組んできた固有値相補性問題とそれに関連する2次分数計画問題に対して、交互方向乗数法および分割法の考え方に基づくアルゴリズムを開発した。これらのアルゴリズムは対称型、非

対称型のいずれの問題に対しても適用が可能であり、固有値相補性問題や2次分数計画問題に対する手法として従来には見られない新規性を有するものである。この研究成果を研究論文としてとりまとめる作業を行うとともに、国際会議で発表すべく準備を進めている。

(3) マルチリーダー・フォロワーゲームに対する手法の開発：複数のリーダー（先手プレイヤー）がフォロワー（後手プレイヤー）の最適応答を考慮しつつ、各自の最適化を図る非協力ゲームの状況を考えたマルチ・リーダー・フォロワー・ゲームに対するこれまでの研究成果を概観するサーベイ論文を発表した（雑誌論文[7]）。マルチリーダー・フォロワーゲームに対して、まずフォロワーの問題の最適性条件をリーダーの問題の制約条件に取り込むことにより、均衡制約をもつ均衡問題(EPEC)にゲームを再定式化し、次にペナルティ関数を用いてその問題の制約条件に含まれる相補性条件を目的関数に組み込むことを提案した。これにより、元の問題を非凸ではあるが通常のナッシュゲームの形に表すことが可能となる。さらに、再定式化によって得られた均衡制約をもつ均衡問題(EPEC)の解を計算する方法として、ガウス・ザイデル(Gauss-Seidel)型のアルゴリズムを提案し、計算実験によりその有効性を示した。研究の進展に伴って得られた成果は順次学会発表を行うとともに(学会発表[1][3][4])、国際学術論文誌に投稿した(現在査読中)。

(4) 非線形錐最適化問題に対する手法の開発：錐最適化における研究は、従来から凸最適化問題のクラスに対して活発に行われてきたが、本研究ではより一般的な非線形最適化問題に対する方法の開発を行った。まず、無限個の2次錐制約条件を含む非線形半無限計画問題に対して、局所的簡約化技法を用いた逐次2次計画法のアルゴリズムを開発し、その大域的収束性を証明するとともに数値実験により提案手法の有効性を確認した(雑誌論文[8])。非線形計画問題に含まれる不等式制約条件に2乗スラック変数を導入して等式制約条件のみを含む問題に再定式化し、それによって得られる問題に対して、特に2次の最適性条件と制約想定に関する性質を明らかにした(雑誌論文[3])。2乗スラック変数を用いる方法は、より一般的な錐制約条件に対して適用したとき、より効果を発揮し、興味深い結果が得られる。例えば、2次錐計画問題に対して2乗スラック変数を導入して通常非線形計画問題に変換することにより、2次錐制約を取り扱うための特殊な技法を必要とせず、通常非線形計画問題に対するさまざまな方法が適用可能となり、実用的な利点は大きいと期待できる。本研究では、まず非線形2次錐計画問題に対して2乗スラック変数を用いて得られた問題に対して、特に2次の最適性条件および制約想定に関する

詳細な理論的考察を行い、さらに数値実験により2乗スラック変数による変換手法の有効性を検証した(雑誌論文[4])。次に、非線形半正定値計画問題に対しても、同様の考え方に基いて2乗スラック変数によって得られた問題に対して、2次の最適性条件および制約想定に関する理論的考察を行うとともに、数値実験を通して2乗スラック変数による変換手法の有効性を検証した(雑誌論文[2])。最後に、対称錐上の非線形最適化問題を取り扱った。この問題は、上記のすべての錐最適化問題を特別な場合として含む最も一般的なクラスの錐最適化問題である。この問題に対して2乗スラック変数を用いて得られた等式制約の問題に対して、その2次の最適性条件と制約想定に関する厳密な理論的分析をユークリッド的ジョルダン代数の諸性質を用いて行った。さらに非線形計画の標準的な方法である拡大ラグランジュ乗数法を対称錐上の非線形最適化問題に拡張したアルゴリズムを提案し、その収束性に関する理論的な解析を行うとともに、計算実験によりアルゴリズムの挙動について考察を加えた(雑誌論文[1])。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計11件)

[1] B.F. Lourenco, E.H. Fukuda and M. Fukushima, Optimality conditions for problems over symmetric cones and a simple augmented Lagrangian method, *Mathematics of Operations Research* 掲載決定, 査読あり, <https://arxiv.org/abs/1701.05298>

[2] B.F. Lourenco, E.H. Fukuda and M. Fukushima, Optimality conditions for nonlinear semidefinite programming via squared slack variables, *Mathematical Programming* 168 (2018), pp. 177-200, 査読あり, DOI 10.1007/s10107-016-1040-4, <https://arxiv.org/abs/1512.05507>

[3] E.H. Fukuda and M. Fukushima, A note on the squared slack variables technique for nonlinear optimization, *Journal of the Operations Research Society of Japan* 60 (2017), pp. 262-270, 査読あり, [http://www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2016/05/5464.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2016/05/5464.html)

[4] E.H. Fukuda and M. Fukushima, The use of squared slack variables in nonlinear second order cone programming, *Journal of Optimization Theory and Applications* 170 (2016), pp. 394-418, 査読あり, DOI 10.1007/s10957-016-0904-3

[5] L.M. Fernandes, M. Fukushima, J.J. Judice and H.D. Sherali, The second-order cone eigenvalue complementarity problem, *Optimization Methods and Software* 31

(2016), pp. 24-52, 査読あり, DOI 10.1080/10556788.2015.1040156

[6] C.P. Bras, M. Fukushima, A.N. Iusem and J.J. Judice, On the quadratic eigenvalue complementarity problem over a general convex cone, *Applied Mathematics and Computation* 271 (2015), pp. 594-608, 査読あり, DOI 10.1016/j.amc.2015.09.014

[7] M. Hu and M. Fukushima, Multi-leader-follower games: Models, methods and applications, *Journal of the Operations Research Society of Japan* 58 (2015), pp. 1-23, 査読あり, [http://www.orsj.or.jp/~archive/pdf/e\\_mag/Vol.58\\_01\\_001.pdf](http://www.orsj.or.jp/~archive/pdf/e_mag/Vol.58_01_001.pdf)

[8] T. Okuno and M. Fukushima, Local reduction based SQP-type method for semi-infinite programs with an infinite number of second-order cone constraints, *Journal of Global Optimization* 60 (2014), pp. 25-48, 査読あり, DOI 10.1007/s10898-013-0063-0

[9] L.M. Fernandes, J.J. Judice, M. Fukushima and A.N. Iusem, On the symmetric quadratic eigenvalue complementarity problem, *Optimization Methods and Software* 29 (2014), pp. 751-770, 査読あり, DOI 10.1080/10556788.2013.854359

[10] M. Kono and M. Fukushima, A regularized outer approximation method for monotone semi-infinite variational inequality problems, *Pacific Journal of Optimization* 10 (2014), pp. 735-748, 査読あり, DOI なし

[11] L.M. Fernandes, J.J. Judice, H.D. Sherali and M. Fukushima, On the computation of all eigenvalues for the eigenvalue complementarity problem, *Journal of Global Optimization* 59 (2014), pp. 307-326, 査読あり, DOI 10.1007/s10898-014-0165-3

〔学会発表〕(計 12 件)

[1] 堀篤史 (発表者), 福島雅夫, マルチリーダー・フォロワーゲームに対する Gauss-Seidel 法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018 年春季研究発表会, 2018 年 3 月 16 日, 東海大学 (東京都港区)

[2] I. Takami (発表者), M. Fukushima, F. Yamada and S. Inagaki, Maintenance scheduling of flood control plant under uncertainty based on multi-objective optimization, The 7th International Conference on Industrial Technology and Management (ICITM 2018), 2018 年 3 月 8 日, Oxford (UK)

[3] 堀篤史 (発表者), 福島雅夫, マルチリーダー・フォロワーゲームに対する Gauss-Seidel 型ペナルティ法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017 年春季研究発表会, 2017 年 3 月 17 日, 沖縄県市町村自治

会館 (沖縄県那覇市)

[4] A. Hori (発表者) and M. Fukushima, A Gauss-Seidel method for multi-leader-follower games, The Fifth International Conference on Continuous Optimization of the Mathematical Optimization Society, 2016 年 8 月 8 日, 政策研究大学院大学 (東京都港区)

[5] E.H. Fukuda (発表者), B.F. Lourenco and M. Fukushima, Second-order conditions for nonlinear semidefinite optimization problems via slack variables approach, The Fifth International Conference on Continuous Optimization of the Mathematical Optimization Society, 2016 年 8 月 8 日, 政策研究大学院大学 (東京都港区)

[6] 福島雅夫 (発表者), マルチリーダー・フォロワーゲーム -- 連続最適化の観点から --, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016 年春季研究発表会, 2016 年 3 月 18 日, 慶応義塾大学 (神奈川県横浜市)

[7] 福田エレン秀美 (発表者), 福島雅夫, Reformulating nonlinear semidefinite programming problems with squared slack variables, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2015 年秋季研究発表会, 2015 年 9 月 10 日, 九州工業大学 (福岡県北九州市)

[8] 露口大介 (発表者), 福田エレン秀美, 胡明, 福島雅夫, 平滑化法を用いたマルチリーダー・フォロワーゲームの解法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2015 年秋季研究発表会, 2015 年 9 月 10 日, 九州工業大学 (福岡県北九州市)

[9] M. Fukushima (発表者), Go around complementarity, The 22nd International Symposium on Mathematical Programming, 2015 年 7 月 15 日, Pittsburgh (USA)

[10] E.H. Fukuda and M. Fukushima (発表者), Squared slack variables in nonlinear second-order cone programming, International Conference on Variational Analysis, Optimization and Quantitative Finance, 2015 年 5 月 19 日, Limoges (France)

[11] 福島雅夫 (発表者), 均衡問題の数理モデル, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2015 年春季研究発表会, 2015 年 3 月 27 日, 東京理科大学 (東京都新宿区)

[12] M. Fukushima (発表者), Some results in multi-leader-follower games, Optimization 2014, 2014 年 7 月 29 日, Guimaraes (Portugal)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称:  
発明者:

権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ

<http://www.st.nanzan-u.ac.jp/info/fuku/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

福嶋 雅夫 (FUKUSHIMA Masao)  
南山大学・理工学部・教授  
研究者番号：30089114

### (2) 研究分担者

なし ( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

なし ( )

研究者番号：

### (4) 研究協力者

なし ( )