

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 5 月 29 日現在

機関番号：10104

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26330031

研究課題名(和文) 行動計量分析における各種推定量の漸近的性質

研究課題名(英文) Asymptotic properties of parameter estimators for quantitative methods in the behavioral sciences

研究代表者

小笠原 春彦 (Ogasawara, Haruhiko)

小樽商科大学・商学部・特任教授

研究者番号：70271731

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)： 行動計量分析において、モデルにおけるパラメータの推定量の漸近的性質を明らかにした。特に能力検査における項目反応理論(item response theory, IRT)について典型的なモデルである3パラメータロジスティックモデルに関して、項目パラメータと能力パラメータを扱った。また、一般的な統計理論として漸近平均2乗誤差を最小化する最尤推定量の漸近バイアス調整の方法を導出した。これらはIRTの場合にも応用された。

研究成果の概要(英文)： In quantitative methods for the behavioral sciences, asymptotic properties of the parameter estimators in statistical models are derived. In particular, for the 3-parameter logistic model, a typical model in ability tests using item response theory (IRT), the ability and item parameters are focused on, where the maximum likelihood and Bayes modal estimators of these parameters are used. In the case of ability estimation, the weighted score estimator is also dealt with, where the two cases of known and estimated item parameters are considered. As a general statistical method, an asymptotic bias adjustment of usual maximum likelihood estimators minimizing the asymptotic mean square error is obtained. This method has been applied to the estimation of ability in IRT.

研究分野：統計科学

キーワード：項目反応理論 項目パラメータ 能力の推定量 漸近的性質 漸近平均2乗誤差 カノニカルパラメータ

## 1. 研究開始当初の背景

(1) IRT は主に教育場面の能力測定等で用いられる方法論で、典型的には正答誤答の2値データのモデルと解析手法であるといえる。モデルにおけるパラメータは項目(小問)の特性に関するものと被験者の能力に関するものに大別される。後者は確率変数として扱われることが多く、前者の項目パラメータは後者を積分消去した周辺最尤推定により得ることが標準的である。これらは Bock & Lieberman (1970)や Bock & Aitkin (1981)により開発された。

(2) Ogasawara (2009)はこの方法により得られた項目パラメータの推定量の漸近的性質を求めた。Ogasawara (2010)はこの推定量を各種の方法でステューデント化したものの漸近的性質を対数尤度導関数による方法の応用として得た。IRT ではパラメータの位置と尺度の不定性があるため、異なるテストのパラメータを比較できるようにするリンクングという手法があるが、Ogasawara (2011)は標本リンク係数の漸近的性質を求めた。

(3) 能力テストの主な目的は個人の能力をテスト項目の正答誤答のパターンより推定することである。能力テストがIRTを用いて作成された場合、推定された項目パラメータを既知として扱い、能力を未知のパラメータとして推定することが古くから行われている。最尤推定は Lord (1953)により、ベイズ推定は Birnbaum (1967)、Samejima (1969)により導入された。これらの漸近的性質のうち、正しいモデルの下での漸近バイアスが Lord (1983, 1986)により得られた。Warm (1989)はこれらの応用として漸近バイアスの発生しない疑似ベイズ推定量を加重スコア法の一つとして求めた。なお、2パラメータログスティックモデルではこの推定量がジェフリーズの事前分布によるベイズモード推定量(BME, Bayes modal estimator)になることが知られている。一方、モデルが正しくない場合を含む能力の推定量の漸近的性質が、最尤推定量については Ogasawara (2012)により、BME 及び疑似ベイズ推定量については Ogasawara (2013a)により導出された。

(4) バイアスは推定量の期待値から対応する真の値を減じたものとして定義され、一般にその絶対値が小さいほど好ましい。一方、ある推定量の誤差の総合的指標の典型的なものは推定量と真値の差の2乗の期待値(平均2乗誤差)である。平均2乗誤差は推定量の分散とバイアスの2乗の和になる。行動計量分析の興味ある推定量の多くの場合、平均2乗誤差を正確に求めることは困難であるが、漸近的なものは得ることができることが少なくない。漸近バイアスを除く典型的な方法は推定量から漸近バイアスの標本値を減じ

るものである。一方、Firth (1993)は予め漸近バイアスを発生させない一般的な方法を開発した。

## 2. 研究の目的

行動計量分析においては、データより得られたパラメータ等の推定量は標本変動の影響を受ける。したがって、それらを真の値の推定に利用する場合は推定量の統計的変動を予め把握する必要がある。しかしながら、この変動を正確に評価することは多くの場合困難である。一方、漸近理論により、その漸近的近似を得ることは可能であることが多い。ここではIRTにおける各種パラメータ、漸近平均2乗誤差の最小化、指数分布族におけるカノニカルパラメータ、事前分布のベキの利用等に焦点を当てる

## 3. 研究の方法

(1) 能力テストのIRTモデルでは、当て推量の項目パラメータを含む3パラメータログスティックモデル(3PLM)が一般的であるが、パラメータに強い制約を課さないと推定値が得られないという問題がある。この場合、BMEを用いることが一般的であり、その漸近的性質を導出することが求められる。その一部は Ogasawara (2013a)によって得られているが、これらをさらに発展させる。

(2) 現実の能力テストの項目パラメータは推定値であり、その標本変動の能力の推定量への影響が考えられる。その解決のため様々な方法が用いられてきたが、疑似最尤推定(PML)の結果を利用した能力の推定量の漸近分散が Hoshino & Shigemasu (2008)と Cheng & Yuan (2010)により得られている。これら以外の漸近キュミュラントに関しては、一部が Ogasawara (2013b)により導出されたがこれらをさらに発展させる。

(3) バイアスを除くことは平均2乗誤差を概して縮小する傾向をもたらすが、逆の場合もある。平均2乗誤差も多くの場合正確に求めることは困難であるが、漸近分散と漸近バイアスの2乗の和(漸近平均2乗誤差)として近似的に得られることが少なくない。推定量から標本漸近バイアスの定数倍を減じ、バイアス調整した推定量を定義し、これの漸近平均2乗誤差を最小化することにより、誤差を縮小することが得られた。一方、Firth (1993)の方法の拡張として、加重スコア法の適当な重みを用いることにより、同様な結果を得た。

## 4. 研究成果

(1) IRTモデルの項目パラメータの典型的な推定量であるBMEを一般的なIRTモデルである3PLMの場合について扱った。BMEは事後モードの推定方程式から得られるものであり、それを正答誤答の反応パターンの標本割合の陰関数として扱い、陰関数の微分

の性質を利用することにより、標本割合の陽な関数として確率展開により表現することを行った。区間推定においては最尤推定の場合と同じく、ステューデント化された BME が漸近的に標準正規分布に従うことが利用できるが、さらに漸近的に高次の精度を得るためにはステューデント化した BME の高次漸近キミュラントが必要となるのでその導出を行った。

(2) この課題における推定量に関しては標本の大きさは 2 種類存在する。すなわち IRT における項目パラメータを推定するための被験者集団の人数 ( $N$  で表す) と項目数 ( $n$  で表す) である。  $N$  と  $n$  の関係について Ogasawara (2013b) は、  $N = O(n)$ ,  $N = O(n^{3/2})$ ,  $N = O(n^2)$  の 3 種の仮定をおいて考察している。これらの仮定を用いて、項目パラメータが周辺最尤推定あるいはベイズ推定された場合、かつ能力パラメータが最尤推定、ベイズ及び疑似ベイズ推定の各方法で得られた場合に、能力の推定量の漸近キミュラント等を導出した。

(3) バイアス調整した推定量の漸近平均 2 乗誤差の最小化はその  $1/n^2$  の次数の高次漸近分散の項と  $1/n$  の次数の漸近バイアスの 2 乗の和を最小化することに帰着する。その和はバイアス調整に用いた定数の 2 次式になり、和を最小化する最適な定数は容易に得られた。一般にこの最小化する定数は未知の母集団値に依存するが、Ogasawara (2013c) はこれに依存しない固定値の例としてポアソン分布における事象間隔パラメータと変動係数が既知の正規分布のパラメータをあげている。二項分布のロジットの例では最小化する係数は母集団割合に依存するが、係数の実用的な下限が得られている。二項分布の例は IRT における能力の推定に関して応用された。IRT のロジスティックモデルは異なる独立なベルヌーイ分布の下でのロジットのモデルであるので、前記の下限を用いることにより、能力の推定量の漸近平均 2 乗誤差を減少させることが可能となった。

(4) カノニカルパラメータがスカラーの場合もポアソン分布、二項分布等重要な分布がある。スカラーの場合は最尤推定量の高次漸近分散及び 4 次までの漸近キミュラントはスカラーの十分統計量 (期待値パラメータの推定量) の歪度の 2 乗と尖度の簡単な関数になることが示された。スカラーのカノニカルパラメータの最尤推定量をステューデント化した場合の漸近キミュラントは、IRT における能力パラメータ (スカラーのカノニカルパラメータ) の文脈で Ogasawara (2013a) が導出している。その結果、漸近バイアスは 0 になることが示された。この例の証明より、カノニカルパラメータがスカラーの一般的な場合にも成立することが示された。

(5) 複数のパラメータの推定量を同時に考えた場合の漸近平均 2 乗誤差は様々に定義できる。ひとつは既知の重みによる線形結合である。この場合、高次漸近共分散行列が必要になる。もうひとつの定義は、行列漸近平均 2 乗誤差 (Giles & Rayner, 1979) を考えそのトレースをとるものであり、Gruber (1998) は全 (total) 平均 2 乗誤差と呼んだ。このふたつを一般性のあるものとして採用した。どちらの場合も事前分布のベキを用いた BME を加重スコア法によるものと同様に確率展開を行った。これより、漸近バイアスベクトルと高次漸近共分散行列が導出された。これらをもとにして最適な事前分布のベキは個々のパラメータの場合と同様に得られた。

さらに指数分布族においてスカラーのカノニカルパラメータの場合は、ステューデント化した BME の性質より漸近的により精度の高いワルド区間推定が得られることが最適なベキを得ることにより示された。これは分布の漸近展開において正規近似の次の項がベキを調整することにより消去されることによるものであった。

#### < 引用文献 >

- Birnbaum, A. (1967). *Statistical theory for logistic mental test models with a prior distribution of ability*. (Research Bulletin RB-67-12). Princeton, NJ: Educational Testing Service. Subsequently published in *Journal of Mathematical Psychology*, 6, 258-276. (1969).
- Bock, R. D., & Aitkin, M. (1981). Marginal maximum likelihood estimation of item parameters: Application of an EM algorithm. *Psychometrika*, 46, 443-459.
- Bock, R. D., & Lieberman, M. (1970). Fitting a response model for  $n$  dichotomously scored items. *Psychometrika*, 35, 179-197.
- Cheng, Y., & Yuan, K.-H. (2010). The impact of fallible item parameter estimates on latent trait recovery. *Psychometrika*, 75, 280-291.
- Firth, D. (1993). Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika*, 80, 27-38.
- Giles, D. E. A., & Rayner, A. C. (1979). The mean squared errors of the maximum likelihood and natural-conjugate Bayes regression estimators. *Journal of Econometrics*, 11, 319-334.
- Gruber, M. H. J. (1998). *Improving efficiency by shrinkage: The James-Stein and ridge regression estimators*. New York: Marcel Dekker.
- Hoshino, T., & Shigemasa, K. (2008). Standard errors of estimated latent variable scores with estimated structural parameters. *Applied Psychological Measurement*, 32, 181-189.

Lord, F. M. (1953). An application of confidence intervals and of maximum likelihood to the estimation of an examinee's ability. *Psychometrika*, 18, 57-76.

Lord, F. M. (1983). Unbiased estimators of ability parameters, of their variance, and of their parallel-forms reliability. *Psychometrika*, 48, 233-245.

Lord, F. M. (1986). Maximum likelihood and Bayesian parameter estimation in item response theory. *Journal of Educational Measurement*, 23, 157-162.

Ogasawara, H. (2009). Asymptotic cumulants of the parameter estimators in item response theory. *Computational Statistics*, 24, 313-331.

Ogasawara, H. (2010). Asymptotic expansions for the pivots using log-likelihood derivatives with an application in item response theory. *Journal of Multivariate Analysis*, 101, 2149-2167.

Ogasawara, H. (2011). Applications of asymptotic expansion in item response theory linking. In A. A. von Davier (Ed.), *Statistical models of test equating, scaling, and linking* (pp.261-280). New York: Springer.

Ogasawara, H. (2012). Asymptotic expansions for the ability estimator in item response theory. *Computational Statistics*, 27, 661-683.

Ogasawara, H. (2013a). Asymptotic properties of the Bayes and pseudo Bayes estimators of ability in item response theory. *Journal of Multivariate Analysis*, 114, 359-377.

Ogasawara, H. (2013b). Asymptotic cumulants of the ability estimators using fallible item parameters. *Journal of Multivariate Analysis*, 119, 144-162.

Ogasawara, H. (2013c). Asymptotic cumulants of the estimator of the canonical parameter in the exponential family. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 143, 2142-2150.

Samejima, F. (1969). Estimation of latent ability using a response pattern of graded scores. *Psychometrika Monograph*, No. 17, 34 (4, Pt.2).

Warm, T. A. (1989). Weighted likelihood estimation of ability in item response theory. *Psychometrika*, 54, 427-450.

#### 5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

Ogasawara, H. (2016a). Asymptotic expansions for the estimators of Lagrange multipliers and associated parameters by the maximum likelihood and weighted score methods. *Journal of Multivariate Analysis*, 147, 20-37. doi:10.1016/j.jmva.2015.12.015.

査読有

Ogasawara, H. (2016b). Bias correction of the Akaike information criterion in factor analysis. *Journal of Multivariate Analysis*, 149, 144-159. doi:10.1016/j.jmva.2016.04.003. 査読有

Ogasawara, H. (2016c). Optimal information criteria minimizing their asymptotic mean square errors. *Sankhyā, B*, 78, 152-182. doi: 10.1007/s13571-016-0115-9. 査読有

Ogasawara, H. (2016d). Matching pseudocounts for interval estimation of binomial and Poisson parameters. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 45, 5166-5178. doi: 10.1080/03610926.2014.941492. 査読有

Ogasawara, H. (2016e) Asymptotic cumulants of some information criteria. *Journal of the Japanese Society of Computational Statistics*, 29, 1-25. doi:10.5183/jjscs.1512001.225. 査読有

Ogasawara, H. (2015). Bias adjustment minimizing the asymptotic mean square error. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 44, 3503-3522. doi: 10.1080/03610926.2013.786788. 査読有

Ogasawara, H. (2014a). Estimation of ability using pseudocounts in item response theory. *Behaviormetrika*, 41, 131-146. 査読有

Ogasawara, H. (2014b). Optimization of the Gaussian and Jeffreys power priors with emphasis on the canonical parameters in the exponential family. *Behaviormetrika*, 41, 195-223. 査読有

[学会発表](計20件)

小笠原 春彦 (2016年5月20日) 漸近平均二乗誤差を最小化する情報量規準, 日本計算機統計学会第30回大会, ハートピア京都

Ogasawara, H. (July 13, 2016) Estimation of ability with reduced asymptotic mean square error. The 2016 International Meeting of the Psychometric Society, Asheville, NC, USA.

Ogasawara, H. (July 28, 2016) Asymptotic cumulants of ability estimators using fallible item parameters. The 31st International Congress of Psychology (the 80th annual meeting of the Japanese Psychological Association), Yokohama, Japan.

Ogasawara, H. (August 24, 2016) Asymptotic expansions for the estimators of Lagrange multipliers and associated parameters by the weighted score methods. The 22nd International Conference on Computational Statistics, Oviedo, Spain.

小笠原 春彦 (2016年9月1日) 二項及びポアソンパラメータの区間推定における漸近精度を向上させる擬似度数, 日本行動計量学会第44回大会, 札幌学院大学

小笠原 春彦 (2016年9月6日) 加重スコア法によるラグランジュ未定乗数と関連するパラメータの推定量の漸近展開, 2016年度統計関連学会連合大会, 金沢大学角間キャンパス

Ogasawara, H. (September 7, 2016) Bias prevention of the Akaike information criterion by the Jeffreys prior. Japanese Joint Statistical Meetings, Kanazawa University, Kanazawa, Japan.

Ogasawara, H. (2016年11月25日) 情報量規準の漸近キュミュラント, 日本計算機統計学会第30回シンポジウム, プラサヴェルデ (沼津市)

Ogasawara, H. (July 3, 2015) Optimization of the Gaussian and Jeffreys power priors with emphasis on the canonical parameters in the exponential family. 2015 IMS-China International Conference on Statistics and Probability (IMS = The Institute of Mathematical Statistics), Kunming, China.

Ogasawara, H. (July 8, 2015) Asymptotic properties of the Bayes modal estimators of item parameters in item response theory. The 14th European Congress of Psychology, Milan, Italy.

Ogasawara, H. (July 27, 2015) Matching pseudocounts for interval estimation of binomial and Poisson parameters. The 60th World Statistics Congress, Rio de Janeiro, Brazil.

小笠原 春彦 (2015年9月2日) 項目反応理論における能力パラメータの推定量の漸近期待2乗誤差の縮小, 日本行動計量学会第43回大会, 首都大学東京 南大沢キャンパス

小笠原 春彦 (2015年9月9日) 正規及びジェフェリーズ事前分布の冪に関する最適化 主に指数分布族におけるカノニカルパラメータの場合, 2015年度統計関連学会連合大会, 岡山大学津島キャンパス

小笠原 春彦 (2015年9月22日) 項目反応理論における擬似度数を用いた能力パラメータの推定, 日本心理学会第79回大会, 名古屋国際会議場

Ogasawara, H. (June 30, 2014) Asymptotic cumulants of the estimator of the canonical parameter in the exponential family. The 11th International Vilnius Conference on Probability and Mathematical Statistics, Vilnius, Lithuania.

Ogasawara, H. (August 5, 2014) Asymptotic properties of the Bayes and pseudo Bayes estimators of ability in item response theory. Joint Statistical Meetings, Boston, MA, USA.

Ogasawara, H. (August 19, 2014) On the estimator of the canonical parameter in the exponential family. The 21st International Conference on Computational Statistics, Geneva, Switzerland.

小笠原 春彦 (2014年9月5日) 項目反応理論における推定された項目パラメータを用いた能力の推定量の漸近キュミュラント, 日本行動計量学会第42回大会, 東北大学川内北キャンパス

小笠原 春彦 (2014年9月10日) IRTにおける項目パラメータのベイズ推定量の漸近的性質, 日本心理学会第78回大会, 同志社大学今出川キャンパス

小笠原 春彦 (2014年9月16日) 指数分布族におけるカノニカルパラメータの推定量の漸近キュミュラント, 2014年度統計関連学会連合大会, 東京大学本郷キャンパス

〔その他〕

ホームページ:

<http://www.res.otaru-uc.ac.jp/~hogasa/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小笠原 春彦 (OGASAWARA, Haruhiko)

小樽商科大学・商学部・特任教授

研究者番号: 70271731