

令和 元年 6 月 16 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2014～2018

課題番号：26350188

研究課題名（和文）モデルを志向した算数・数学の垂直カリキュラムの開発

研究課題名（英文）Curriculum development on vertical sequence of mathematics based on model-oriented approach

研究代表者

池田 敏和（IKEDA, Toshikazu）

横浜国立大学・教育学部・教授

研究者番号：70212777

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：複数の世界を行き来する活動に焦点を当てた具体的教材を開発し、複数の世界を行き来することの意義を例証した。そして、算数・数学科の垂直カリキュラムの開発に向けて、図形領域に焦点を当て、世界の区分を「対象」「行為」という二つの視点から、複数の世界を行き来を通して数学的知識が成長していく核となる局面を九つ同定した。「対象」に関しては図形の同値関係の考察を、「行為」に関しては図形の操作・変換の考察を対応させて考えている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本論では、応用志向と構造志向といった二つの考えを二律背反的に考えるのではなく、両者が共に影響を与えることによって、現実の世界、数学の世界が共に成長していくとともに、二つの世界をつなぐ関係自体も成長していくという考えを基にしている。そして、現実の世界、数学の世界を拡張して複数の世界として捉え直し、複数の世界間において、互いが互いを成長させるという考えに基づくカリキュラム開発に焦点を当てている。このような方針は、持続的な数学的知識の成長を促すカリキュラムを開発していく上で、一つの指針に成り得ると考える。

研究成果の概要（英文）：The values of interactive translations among plural worlds were discussed by developing the concrete materials focused on interactive translations among plural worlds. Targeting the curriculum development on vertical sequences of mathematics, nine phases to deepen students' mathematical knowledge concerning Geometry through interactive translations among plural worlds are identified from two viewpoints "objects" and "actions". Concerning objects, equivalence relationships of geometric figures are identified, and concerning actions, operations and transformations of geometric figures are identified.

研究分野：数学教育学

キーワード：モデル 算数・数学 カリキュラム

様式 C - 19, F - 19 - 1, Z - 19, CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

算数・数学学習を持続的に展開させるには、具体的な問題を解決することに終始した学習だけでは難しく、児童・生徒の内的な世界に数学を創り上げることを目的とした学習活動を徐々に取り入れていく必要がある。これは、数学者による新たな数学を創っていく活動に関連しており、児童・生徒の内的な世界に算数・数学を創り上げていく行為である。このような行為を通してこそ、児童・生徒の内的な世界に算数・数学を体系的につくることが可能になる。このように考えると、算数・数学学習を持続的に推し進めていくためには、次の二つの目的を意識的に区別して有機的に関連づけながら取り扱っていく必要がある。

目的1：具体的世界に生じた問題をこれまで獲得した数学的知識を駆使して解決すること

目的2：抽象的世界に断片的な数学的知識を構成し、それらを関連付け・体系化すること

両者は、表裏一体の関係にあり、同じ行為を行っていても、目的をどちらにおいているかによって区別される。数学教育における二つの方向からの目的を達成するために、本研究では、モデルという概念に着目する。特に、2つの目的を有機的に関連づけながら数学学習を持続的に推し進めていくために、次の2つのモデルの役割に着目する。

第1のモデル：思考の場（思考空間）としてのモデル

第2のモデル：対比（参照）の対象としてのモデル

当面している問題がどのように考えればよいか不明確であるとき、その問題が生じた場面（世界）と類似した馴染みのある別の場面（世界）を見出し、別の場面（世界）での要素間の構造を見本に、当面している問題を探究しようとする。別の場面（世界）は馴染みがある故に要素間の構造を熟知しており、場面（世界）が類似しているが故に他の部分も類似しているのではないかというアナロジー（類比）が働くわけである。モデルは、アナロジー（類比）を引き出すための見本となる要素間の構造（システム）を意味する。

このような立場から、算数・数学教育の垂直的なカリキュラムを見直したとき、どのような示唆が得られるであろうか。本研究は、数学教育の2つの目的の有機的な関連付けを目標に設定しながら、モデルの2つの役割を基に、算数・数学科の垂直的なカリキュラムを再検討していくことを意図している。

2. 研究の目的

(1) モデルを志向する立場から、複数の世界を行き来する教材を開発すると共に、二つの目的がどのように有機的に関連づけながら知識が成長していくのかについて明らかにする。

(2) 小・中・高等学校における算数・数学科における図形領域に焦点化し、モデルを志向する立場から垂直カリキュラムを構想すると共に、それらを教材化する。

3. 研究の方法

(1) モデルに着目した数学的知識の深化過程に関わる海外の研究を分析し、本研究との立場の同異を明確にすると共に、参考にできる点を抽出する。

(2) 複数の世界を行き来する図形領域における教材を開発し、二つの目的がどのように有機的に関連づけながら数学的知識が深化していくのかについて分析し、その過程をモデル化する。

(3) 小学校算数科、中学校数学科、高等学校数学科において図形領域に焦点を当て、児童・生徒の図形における見方が革命的に変化する局面を同定し、それらの系統図を作成する。特に、図形の操作・変換からそのシステム化については具体的に教材開発する。

4. 研究成果

(1) 複数の世界を行き来する活動に焦点を当てた教材「2地点の距離から極限の基本定理へ」を開発した。本教材では、飛行機の最短航路を考える問題と円の面積の求め方における類似点、並びに、半円の弧長の和の問題との相違点に着目し、直観的に捉えていた行為を抽象化（統合）していく活動に焦点を当てる。現実の世界で生じた問題を出発点にして、行為（操作）に着目した三つの世界（具体的操作が許された世界、作図が許された世界、記号的操作が許された世界）を中心に動きがなされる。まずは、飛行機の最短航路を考えることから始まる。そして、問題を解決した後に、「半径をどんどん大きくしていくと、弧の長さは直線にどんどん近づいていく」という数学的知識を整理することで、それに関連した、既存の似たような数学的知識を探り、モデルを見いだすことが促される。未知な要素に目を向けることで、適用範囲を広げる活動が促される。そうすると、円の面積を求める際にも、円を細かく扇形に切り、平行四辺形に変形したこと、また、半円の直径上に、直径を2等分、4等分、8等分、...、 $2n$ 等分した半円を作図し、 $2n$ 等分した半円の弧の長さの和がどのように変化していくかを考えたこと等がモデルとして引き出される。そして、これら三つの個々の事象を対比してみると、最初の二つの事象（2地点の距離、円の面積）は、直線に近づいていくが、三つ目の事象（ $2n$ 等分した半円の弧の長さの和）は、直線に近づいていかなることが見えてくる。この違いを明確にするために、最初の二つの事象の共通点を抽象化していくことになる。2地点の距離の問題と円の面積の問題を不整合な要素と見ることさらなる活動が促され、極限の基本定理が導かれることになる。記号的操作が許された世界に極限の基本定理が導かれると共に、具体的操作、作図・測定が許された世界に、極限の基本定理に適合する二つの事例と適合しない一つの事例が見いだされたという意味で、数学的知識は成長している。このように、本教材では、目的「具体

的な問題をこれまで獲得した数学的知識を駆使して解決すること」に関わる活動から始まり、目的「内的な世界に構築された断片的な数学的知識を関連付け、体系化すること」に関わる活動へとつながっていることがわかる。

(2) 図形領域に焦点を当て、児童・生徒の図形における見方が革命的に変化する局面を同定し、それらの系統図を作成した。図形の実体的対象(目に見えるもの)に関わる図形の同値関係の考察では、ものの形に着目して分類する世界、図形の構成要素に着目して分類する世界、図形の性質の相互関係に着目して分類する世界といった流れからなる三つの世界を同定した。一方、図形の操作的存在(目に見えないもの)に関わる図形の操作・変換の考察では、図形の直観的で無意識の具体的操作が許された世界から、作図・測定が許された世界、組織的な具体的操作(例えば、平行移動、回転移動、対称移動)が許された世界への流れからなる三つの世界を同定した。ここで、両者は、帰納的推論から演繹的推論への移行の中で、初等幾何(局所的論証)によって融合することになる。そして、初等幾何学的考察は、局所的論証による世界から大局的論証による世界へと深化していくとともに、座標幾何学的考察が許された世界を経て、図形の記号的操作が許された世界(行列変換・複素数変換)へと進展していくことになる。一方、様々な変換が許された世界が明らかになると、今度は、その変換により図形の同値関係を定めるという考えが芽生え、図形の実体的対象と図形の操作的存在がふたたび融合することになる。

上記の考察をもとに、複数の世界の行き来を通して数学的知識が成長する核となる局面(数学的知識を成長させる再帰的な活動における第4の活動)が九つ同定された。

ものの形を仲間分けする活動

図形を写し取る活動

図形の性質の相互関係、並びに、図形の成立条件を考察する活動

図形の決定条件をもとに構成要素どうしの数量関係を探る活動

図形の具体的操作から論証への活動

ものの位置を記号的表現で伝える活動

座標平面上で初等幾何を考察する活動

移動・変換の記号(数式)的操作を開発する活動

初等幾何における命題を体系化する活動

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計6件)

Ikeda, Toshikazu. Evaluating student perceptions of the roles of mathematics in society following an experimental teaching program, ZDM Volume 50 Issue 1-2, pp.259-271,2018. 査読あり

Ikeda, Toshikazu, & Stephens, Max. Modelling as interactive translations among plural worlds: Experimental teaching using the night-time problem, Mathematical modelling and applications –Crossing and researching boundaries in mathematics education (pp.399-409), Springer International Publishing, 2017. 査読あり

Ikeda, Toshikazu and Stephens, Max. Reconsidering the Roles and Characteristics of Models in Mathematics Education, Mathematical Modelling in Education Research and Practice, Springer, pp.351-361, 2015. 査読あり

Brown, Jill and Ikeda, Toshikazu. Mathematical Applications and Modelling in the Teaching and Learning of mathematics, The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education, pp.469-473, 2015. 査読あり

Ikeda, Toshikazu. Mathematical Modelling in Japan, Mathematical Modelling from Theory to Practice, World Scientific, pp.83-96, 2015. 査読あり

Ikeda, Toshikazu. Applying PISA Ideas to Classroom Teaching of Mathematical Modelling, Assessing Mathematical Literacy, Springer, pp.221-238, 2014. 査読あり

〔学会発表〕(計3件)

Ikeda, Toshikazu, Stephens, Max. Constructing mathematical knowledge through modelling: From the shortest route between two points to a fundamental theorem of limit, Conference Book, p.22, ICTMA18, 23-28 July 2017 in Cape town.

Ikeda, Toshikazu, Organizing Mathematical Modelling in Japanese Mathematics Curriculum, Final Programme of 13th International Congress on Mathematical Education, p.32, 24-31 July 2016 in Hamburg.

Ikeda, Toshikazu, & Stephens, Max. Modelling as interactive translations among plural worlds: Experimental teaching using the night-time problem, 19-25 July 2015 in Nottingham.

〔図書〕(計3件)

池田敏和, モデルを志向した数学教育の展開, 東洋館, 2017年2月

池田敏和, 藤原大樹, 数学的活動の再考, 学校図書, 2016年1月

池田敏和, 数学的思考に基づく教材開発のストラテジー24, 明治図書, 2014年9月

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

取得状況（計 0 件）

6. 研究組織

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。