

平成 29 年 6 月 16 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26350231

研究課題名(和文)「数学的に考える力」に焦点をあてた教員養成プログラムの開発

研究課題名(英文) Development of teacher training programs focused on "knowledge and skills for mathematical thinking"

研究代表者

伊藤 武廣 (ITO, Takehiro)

信州大学・教育学部・名誉教授

研究者番号：00015827

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、「数学的に考える力」に焦点をあてた教員養成プログラムの開発である。そのために、暫定版プログラムを開発、実施し、プログラムの改善点を特定し、プログラムに反映した。本研究の成果として、課題探究型の学びを通して「数学的に考える力」を高めることができるようにするために、三つの中等学校数学科教員養成プログラムと二つの小学校教員養成プログラムが開発された。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to develop a teacher training program focused on "knowledge and skills for mathematical thinking". To achieve this objective, we developed and implemented provisional programs, identified the improvement points of the programs, and reflected them in the programs. As results of this research, three secondary school mathematics teacher training programs and two elementary school teacher training programs were developed to make it possible to deepen "knowledge and skills for mathematical thinking" through problem solving.

研究分野：数学

キーワード：数学的に考える力 教員養成

1. 研究開始当初の背景

中央教育審議会(2013)は『第2期教育振興基本計画(答申)』において、「多様で変化の激しい社会の中で個人の自立と協働を図るための主体的・能動的な力」の養成や、「変化や新たな価値を主導・創造し、社会の各分野を牽引していく人材」の養成を求めている。この実現には、子どもが主体的に課題を探究する学習が欠かせない。そのためには、こうした学習をデザインする教員に、課題を自ら設定しその解決に取り組み、その過程や結果を評価・改善するなどの課題探究型の学びを体験していることが必要不可欠となる。

教育内容そのものの知識、授業を想定した教育内容の知識など、さまざまな観点から、算数・数学科の学習指導に必要な不可欠な知識を吟味する研究がある(Rowland & Ruthven, 2011 など)。しかし、算数・数学科の学習指導に必要な不可欠な知識を学生が獲得できるようにするために、教員養成プログラムとしていかに具現化するかについては、議論や検討が十分なされていないと言われている。

「数学的リテラシー」(OECD)など近接する概念に着目した教員養成プログラム開発も行われている。本研究は、知識内容や技能そのものも吟味の対象とするが、これら知識や技能の獲得の仕方も吟味の対象とし、教材、指導方略、評価方法を提供しようとするものである。それゆえ、このプログラムの一部は、現職教員研修プログラムとしても有効に働くことが期待される。

2. 研究の目的

本研究の目的は、「数学的に考える力」に焦点をあてた教員養成プログラムを開発することである。

3. 研究の方法

まず、「数学的に考える力」の概念を規定する。次に、課題探究型の学びを通して「数学的に考える力」を高めることができるようにするための、教材とその配列、指導方略、評価方法からなる教員養成プログラム(暫定版)を開発する。次いで、この暫定版プログラムを実施し、プログラムの改善点を特定し、改訂版プログラムを開発する。最後に、改訂版プログラムの実施による効果の検証を踏まえて更なる改善点を特定し、プログラムに反映する。

4. 研究成果

(1) 「数学的に考える力」の概念規定

『特定の課題に関する調査』において、「数学的に考える力」は、「算数的活動や数学的活動を支え、遂行するために必要な資質や能力などの総称」とされ、以下のように3つの観点から捉えられている。日常事象の考察に算数・数学を生かすこと。発展的・創造的に考えること(算数・数学の世界で事象を考察すること)。論理的に考えること。

本研究においては、これら三観点のうち、とに焦点をあて、教員養成プログラムを開発することにした。

(2) 主として代数学分野の教材、指導方略、評価方法の開発

プログラム『学校数学における「計算の仕方を考える」を考える』

このプログラムのねらいは、学校数学における「計算の仕方を考える」ことにみられる特徴を踏まえて授業デザインに反映することができるようになることである。

このプログラムの特徴は、大きく二つある。まず、小学校第1学年から高等学校第1学年に渡る「計算の仕方を考える」活動にみられる特徴を分析することである。そのために、複数場面での計算の仕方を考えるアイデアを振り返って統合する機会を設けている。次に、学校数学における「計算の仕方を考える」ことと、課題探究しながら数を代数的に構成し加法と乗法を定義する活動との結びつきを強めるために、「計算の仕方を考える」活動の特徴を踏まえて、自然数から整数、さらに有理数を代数的に構成し、これらの数における加法と乗法を探究しながら定義する活動へと発展的に学習することである。

プログラムを実施し、吟味した結果、ねらいに相応しい活動が実現可能であることが検証されるとともに、次の二つの課題が明らかになった。

- ・学校数学における「計算の仕方を考える」ことにみられる特徴や、数の代数的構成の特徴を踏まえつつ、受けもった学級の子どもの実態を加味しつつ授業デザインできるようにすること。今回、教員養成段階のプログラムであるがゆえに、「計算の仕方を考える」ことにみられる特徴や、数の代数的構成の特徴を踏まえて授業デザインに反映することができることについては、実際の子どもの対象とできず想定する子どもに留まらざるをえない制約があるためである。

- ・「伴って変わる2つの数量の関係を考える」などのプログラム開発に向けて、本プログラムの成果を援用できる部分を吟味すること。

(3) 主として幾何学分野の教材、指導方略、評価方法の開発

プログラム『数学教員養成における、ユークリッド幾何学・非ユークリッド幾何学』

このプログラムのねらいは、学校教育の幾何学分野において重要な題材であるユークリッド幾何学および、現代幾何学の重要な分野であるリーマン幾何学とも深い関係を持つ非ユークリッド幾何学を学習する際に、学生が利用できる、動的ソフトウェアを用いたコンテンツを開発することである。

プログラムの特徴は、Cabri3Dを用いた動的コンテンツを利用した教材の使用である。例えば、非ユークリッド幾何学の双曲幾何のモデルにおいては、紙面や数式のみでの解説

はイメージが難しく、動的ソフトウェアで作成した図を動かしながら解説し、Web上に自習教材を提供することによって、学生の理解度の向上を図っている。

作成・使用しているコンテンツの内容は、ポアンカレの上半平面モデルにおける平面、直線、点、角、円の解説、ユークリッドの5つの公準との関係、二点の距離、三角形の内角の和、クラインの球面モデルとの対応関係等であり、実際に点を動かして二点間の距離や三角形の内角の和を計算する等の機能がある。

Web上に掲載した自習教材は、講義の要点をまとめた資料と動的コンテンツの組み合わせから作成されている。コンテンツをダウンロードすることで、ソフトウェアを用いて実際にモデルを動かすことが可能である。

非ユークリッド幾何学のモデルの正確な理解のためには、無定義語の概念や、ユークリッド幾何学とは異なる距離の導入、双曲線関数を用いた計算等、様々な概念の理解が必要となり、通常の黒板のみを用いた解説では、時間数や難易度の点で、十分な解説が困難であったが、このプログラムの使用により、学生が各自モデルを動かすことにより、モデルの直感的な理解、特に上半平面モデルにおける「直線」や「円」、「三角形」などのイメージを培うことが出来る。

さらに、ユークリッド幾何学や面積に関する解説を行う際にも、図表を使用した教材を開発し、使用した。

特に理解が難しい上半モデルの円や距離に関する解説の改良を行うなど、年度ごとに内容の更新を行っている。

プログラムを実施し、吟味した結果、次の二点の課題を得た。

- ・授業内容の定着をはかるため、演習問題を交えた自習用コンテンツの開発が必要であると考えられる。

- ・他の幾何学系科目の学習に際し、たとえば曲面論や多様体論の分野においても、自習用教材の開発は可能であると考えられる。当プログラムの、Web教材のインターフェイスを改良し、他科目の教材を作成する際のテンプレートとして使用できるよう、整備したい。

プログラム『小学校教員養成における、科目「算数基礎」での幾何学』

このプログラムの狙いは、信州大学教育学部小学校教員養成の必修科目である算数基礎において、幾何学に関する題材を学習する際に、学生の理解の向上を図るための教材開発を行うことである。

題材は、『数学教員養成における、ユークリッド幾何学・非ユークリッド幾何学』における内容を、小学校教員養成という観点から再検討し、小学校での指導内容との関連や、歴史的な経緯に重点を置いて再構成したものである。

このプログラムの特徴は、ユークリッド幾何学の内容と歴史、ヒルベルトの形式主義、

非ユークリッド幾何学を含むその後の幾何学の発展について、学習するコンテンツを作成・使用していることである。また、算数で学ぶ図形の基本的な性質について、例えば三角形の合同条件などは、ユークリッド原論ではどのように証明されているか、公理や定義から順に学習できる。コンテンツは講義資料としてWebに掲載し、自習教材として利用可能である。

プログラムの実施に基づき、以下の二点の課題が得られた。

- ・図や動的コンテンツをさらに追加し、内容の充実を図る必要がある。当プログラムは引き続き改良中であるため、内容を講義中の口頭説明で補う部分が多く、学生の理解向上を図るために、コンテンツの整備充実が今後の課題である。特に、自習用のコンテンツの開発が必要である。定期試験やアンケート調査などを参考に、学生の理解度を確認し、Web上で実施できる演習問題を作成したい。その際、図形の性質の証明等、証明に関する演習問題をWeb教材としての特色を生かした形で開発することは、今後数学の他科目のWeb教材を開発するにあたり、幅広く応用可能な、重要な課題である。また、歴史的な経緯の説明は、演習用コンテンツと比べて、自習用教材の作成が比較的容易であると考えられる。

- ・学生に対するアンケート調査の結果から、多数の学生が、算数を指導するためには中学校数学程度の知識があれば十分であると回答している。算数の背景にある数学の知識を深める必要性を学生がより実感できるように、小学校指導要領や教科書の内容を参照し、解説すべき事柄の整理を行い、より内容を吟味する必要がある。

(4)主として解析学分野の教材、指導方略、評価方法の開発

プログラム『課題探究型授業の実現』

このプログラムのねらいは、学生が課題探究型授業を通して発展的・創造的に考える活動を体験し、その経験をもとに学校教育においても児童・生徒に対して課題探究型授業が行えるようになることである。

このプログラムの特徴は大きく分けて二つある。一つ目は、取り組む課題である。最初に具体的な問題に取り組み、次にその問題を一般化した問題に取り組み。一般化した問題に取り組む段階で、命題の真偽を確かめるため、学生は自ら特殊な状況を設定し、個別に検証していくことになる。このプロセスによって、「数学的に考える力」で大切な「具体から抽象へ」および「抽象から具体へ」の双方を経験することができる。課題は次のものに取り組んだ。まず、ルート2のルート2乗のルート2乗の...の極限值を求める問題。一週間の試行錯誤の後に解説を挟み、次にxのx乗のx乗の...が収束するようなxの範囲を求める問題に取り組んだ。xがルート2の場合が最初の問題であり、2つ目の問題は

その一般化となっている。最初の問題で明らかになるように、 x がルート2のときは収束するが、 x が2のときはどんどん大きくなり発散する。この収束・発散の境を問うのが問題である。 x に具体的な値を代入して収束・発散を検証することができる。

プログラムの二つ目の特徴は、グループ活動である。学生を数人のグループに分け、2つの課題を通して1つのグループで活動をする。学生は協同で課題に取り組み、グループで解決策を模索していく。1人で考えがちな数学の問題をグループで取り組む場を設定した。学生同士で数学の議論をすることは、数学の理解を深める上で大切なプロセスであるが、あまり積極的に行われていない現状を打破するねらいがある。学生がこの経験を生かし、学校数学においてグループ活動を取り入れることができるようになると期待される。

プログラムを実施した結果、ほぼすべてのグループでコンピュータによる数値計算を用いて予想を立てていた。中には問題をさらに一般化するグループもあり、ねらいに相応しい結果となった。一方で結果を吟味した結果、次の二つの課題が明らかになった。

・学校数学でどのような課題探究型授業を実現できるか考案すること。本プログラムは大学生向けであるため、内容も大学数学で高度であるが、学生が将来小中学校で授業を行う際にはそれに相応しい課題探究型授業のプログラムが必要になる。これの開発は今後の課題である。

・グループ活動をより効果的にすること。本プログラムでは2つの課題(具体例とその一般化)を通して同一のグループで活動したが、課題ごとにグループを変えた方がより効果的なのか、また、グループの人数はどの程度が最適なのか、今後の研究で明らかにしていきたい。

プログラム『小学校教員養成課程における「定義に戻って考える力」の養成』

このプログラムのねらいは、小学校教員養成課程の学生が「定義に戻って考える力」を養い、算数教育においてその力を生かした授業が行えるようになることである。

このプログラムの特徴は、大きく分けて二つある。一つ目は、小学校以来中学校・高校と学んできた面積について、改めて考え直すことである。学生たちが面積に対して素朴に抱いているイメージを学生同士でディスカッションする機会を作り、「面積とは何か?」、「我々が面積と言ったときに暗に仮定していることは何か?」といった事柄を再確認する。本プログラムの二つ目の特徴は、面積が満たすべき最小限の事実を並べ、それを改めて面積の定義とし、その事実のみを用いて様々な図形の面積を具体的に計算することである。これによって、面積という概念を正確に認識し、面積の公式が成り立つ課程を1ステップずつ理解していくことができるよ

うになる。特に、面積とは公式で定義されるのではなく、面積の定義から導かれたものが公式であるということを確認できるようになる。面積の定義としては次の4つを採用した。まず、面積は正の数であること(正値性)。次に、基準となる一辺の長さが1の正方形の面積は1であること(規格化条件)。そして、面積は加法性を満たすこと。すなわち、いくつかの部分からなる図形の面積は、その部分の面積の和であること(加法性)。最後に、図形を動かしても面積は変わらないこと(不変性)。

プログラムを実施した結果、ねらいに相応しい結果が得られた。特に、最も基本的な長方形の面積について、深く考察した。面積を計算するには、「一辺の長さが1の正方形をいくつ敷き詰められるか計算すればよい」という認識の学生が多かったが、この認識では一辺の長さが自然数の長方形の面積は計算できるが、一辺の長さが分数になった途端に計算できなくなってしまう。見方を変え、定義に基づいて計算することで、よく知られた縦×横の公式を導出することができるようになった。一方で結果を吟味した結果、次の二つの課題が明らかになった。

・一辺の長さが無理数の長方形の面積を計算する際に極限を導入したが、テクニカルに難しくなってしまった。極限は円の面積を求めるときにも遭遇する大切な概念であるので、本質を失わない範囲で直感的に理解できるプログラムの開発を今後の課題としたい。

・面積以外にも定義に戻って考えることで理解の深まる算数・数学の内容は少なくない。例えば、「分数同士の割り算ではなぜ分数をひっくり返してかけるのか?」といった疑問に正確に答えることができる。このようなプログラムの開発も今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計12件)

Mayuko Kon (in Press). 3-dimensional real hypersurfaces with λ -harmonic curvature. *The 20th International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds*. 査読有

Miyazaki, M., Nagata, J., Chino, K., Fujita, T., Ichikawa, D., Shimizu, S., & Iwanaga, Y. (2016). Developing a Curriculum for Explorative Proving in Lower Secondary School Geometry. *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. 査読有
<http://hdl.handle.net/10091/00019449>.

茅野公穂, 宮川健 (2016). 課題探究として証明することのカリキュラム開発: 領域

「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化.
『日本数学教育学会 第4回春期研究大会論文集』, 163 - 166. 査読無

Mayuko Kon (2016). Non-Hopf hypersurfaces in 2-dimensional complex space forms. *Tokyo Journal of Mathematics*, 39(2), 373-387. 査読有

Mayuko Kon (2016). Ricci tensor of real hypersurfaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 281(1), 103-123. DOI: 10.2140/pjm.2016.281.103. 査読有

Hiroshi ANDO and Yasumichi MATSUZAWA (2015). On Borel equivalence relations related to self-adjoint operators. *Journal of Operator Theory*, 74, 183-194. 査読有 <http://dx.doi.org/10.7900/jot.2014may24.2030>.

Hiroshi ANDO and Yasumichi MATSUZAWA (2015). The Weyl-von Neumann Theorem and Borel Complexity of Unitary Equivalence Modulo Compacts of Self-Adjoint Operators. *The Royal Society of Edinburgh Proceedings A (Mathematics)*, 145, 1115-1144. 査読有 <http://dx.doi.org/10.1017/S0308210515000293>.

Mayuko Kon (2015). Real hypersurfaces in a 2-dimensional complex space form with transversal Killing tensor field. *Proceedings of the 19th International Workshop on Hermitian-Grassmannian Submanifolds*, 19, 159-170. 査読無

茅野公穂, 佐々祐之, 宮崎樹夫, 宮川健, 中川裕之, 岩永恭雄, 松岡樂 (2015). 課題探究として証明することのカリキュラム開発: 領域「数と式」, 「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化. 日本数学教育学会第3回春期研究大会論文集, 7-12. 査読無

茅野公穂, 嶋田和美, 荻原啓一 (2014). 「基本的な作図」において課題探究として証明することの授業化. 日本数学教育学会誌「数学教育」, 96(9), 10-13. 査読有

宮崎樹夫, 永田潤一郎, 茅野公穂 (2014). 中学校数学における課題探究として証明することのカリキュラム開発: 進行状況と授業化の意味・役割. 日本数学教育学会誌「数学教育」, 96(9), 2-5. 査読有

Mayuko Kon (2014). 3-dimensional real hypersurfaces and Ricci operator, *Differential Geometry-Dynamical Systems*, 16, 189-202. 査読有

〔学会発表〕(計10件)

松澤泰道 (2016). Groups of unitaries without property (FH). 日本数学会. 2017年3月26日~2017年3月26日, 首都大学東京.

Mayuko Kon (2016). 3-dimensional real hypersurfaces with α -harmonic curvature, The 20th International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds. 2016年7月29日, Kyungpook National University (Korea).

松澤泰道 (2015). 無限次元群の話. 作用素論作用素環論研究集会. 2015年10月25日, KKR 妙高高原白樺荘.

茅野公穂, 清水あかね (2015). 中学校数学における課題探究として証明することの授業化: 第1学年の小単元「基本的な作図」. 日本科学教育学会第39回年会. 2015年8月23日, 山形大学.

Mayuko Kon (2015). Real hypersurfaces in a 2-dimensional complex space form with transversal Killing tensor fields. *The 19th International Workshop on Hermitian-Grassmannian Submanifolds and Its Applications*. 2015年10月27日, NIMS, Daejeon, South Korea.

松澤泰道 (2014). Weyl-von Neumann 同値関係の複雑さ. 日本数学会年会. 2015年3月22日, 明治大学.

松澤泰道 (2014). 量子力学に於ける時間作用素について. Nagahama Workshop "From Quantum to Life". 2014年11月15日, 長浜バイオ大学.

松澤泰道 (2014). Weyl-von Neumann の定理の複雑さ. 量子場の数理とその周辺 (RIMS 研究集会). 2014年10月6日, 京都大学.

松澤泰道 (2014). Hilbert-Schmidt 群の Fock 空間上での表現. 札幌数理論物理研究集会. 2014年9月1日. 北海道大学.

Mayuko Kon (2015). Shape operator of real hypersurfaces in a 2-dimensional complex space form. *The 9th OCAMI-KNUHGRC Joint Differential Geometry Workshop on Submanifold Geometry and Lie Theory*. 2015年2月13日, 大阪市立大学.

〔図書〕(計1件)

Shimizu, S. & Chino, K. (2015). History of lesson study to develop good practice in Japan. In M. Inprasitha, M. Isoda, B.-H. Yeap, & P. Wang-Iverson (Eds.), *Lesson*

Study: Challenges in Mathematics Education (pp. 123-140). World Scientific.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 武廣 (ITO, Takehiro)

信州大学・教育学部・名誉教授

研究者番号：00015827

(2) 研究分担者

昆 万佑子 (KON, Mayuko)

信州大学・学術研究院教育学系・准教授

研究者番号：70507186

茅野 公穂 (CHINO, Kimiho)

信州大学・学術研究院教育学系・教授

研究者番号：20400658

松澤 泰道 (MATSUZAWA, Yasumichi)

信州大学・学術研究院教育学系・助教

研究者番号：60645620