

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26380244

研究課題名(和文)非対称誤差最小化とその経済学への応用

研究課題名(英文)Asymmetric error minimization and its applications to economics

研究代表者

尾崎 裕之(OZAKI, Hiroyuki)

慶應義塾大学・経済学部(三田)・教授

研究者番号：90281956

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：数学的期待値とは、ある関数を実数で近似して得られる実数であるが、この近似を平均二乗誤差の最小化を通して行うのが数学的期待値の求め方であり、また、このようにして求めた最小化を実現している実数が数学的期待値に他ならない。本研究は、申請者自身が行った、平均二乗誤差をより一般的に拡張した場合の研究をもとにしたものである。より具体的には、過大推定と過少推定を非対称的に評価する誤差を用いて近似した場合の研究を指している。本研究では、これを意思決定論の文脈に応用し、これまでとは全く異なる結果を得た。すなわち、エルスバーグの反例と呼ばれる確率を用いては説明できない現象が、これによって説明できることが示された。

研究成果の概要(英文)：The mathematical expectation of given random variable is known as the best approximate of it by a constant. Importantly, here, the error is measured by the mean-squared-error. Ozaki (2009) extends this conditioning scheme to a more general framework and succeeded in defining the conditioning scheme for a family of functionals that includes the expectation as a very special case. A key idea for this is to use more abstract measurement for errors rather than the mean-squared-error. In particular, he developed the concept of an asymmetric error function that substantially extends the concept of the mean-squared-error. This project applied an asymmetric error function to a more concrete economic situation, namely, Ellsberg's paradox, where the choice patterns of people observed were never able to be explained by means of the concept of usual probability. Ozaki showed that the paradox is resolved even under the traditional probability case if people adopt the asymmetric error functions.

研究分野：理論経済学

キーワード：意思決定論

1. 研究開始当初の背景

(1) 尾崎はその単著論文 Ozaki (2009) で、「条件付け」というオペレーションを、拡張された意味の平均値に応用する方法を提案した。「条件付け」の数学的な構造を調べてみると、これは、より限られた情報（数学的には、より粗い代数で表現される集合族）が与えられたときに、この情報のみで正しくその数値を観測できる関数（数学的には、可測関数）を用いて所与の関数を近似するものであることがわかる。通常の条件付き期待値を計算する場合には、この近似をする際に、L2 ノルムと数学で呼ばれるものを用いて距離を定義し、この距離（誤差と呼んでもよい）を最小にするようなものを選んでいく。この意味で最適な近似が、条件付き期待値に他ならない。

(2) では、「条件付け」を一般化された期待値に定義するにはどのようにすればよいか。通常の期待値を普通 E と呼ぶのに対して、一般化されたものを M と便宜上呼ぶ。また、全く情報がないときにその数値を正確に観測できる関数は、定数関数しかないことがわかる。（数学的には、空集合と全体集合だけからなる部分集合族について可測な関数は、定数関数だけ）もし、ある関数を定数で近似したときに、その定数が必ず M そのものと一致するような距離（誤差）を見つけないことができたとする。すると、このことは、 M という一般化された平均値を生成しているのは、この誤差であり、その最小化であるとみることが許されよう。一端のこのような誤差を見つけないことができれば、この誤差を使い、どんな部分的な情報に対する条件付けも、最適な近似として定義することができてしまう。いうまでもなく、 $M=E$ のときは、この誤差が L2 ノルムで定義される誤差となるとときであり、この意味で、Ozaki (2009) が提案する条件付けは、通常の期待値に対するその、より一般的な期待値のそれへの一般化になっている。Ozaki (2009) では、このように提案された方法が、実際に機能する、すなわち、条件付けというオペレーションが、一意にきっちり定まり、そこにあいまいさのないことが証明されている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、前項で提示された一般化された条件付けの概念、より具体的には、誤差の概念（誤差を決めると、条件付けの概念が確定するので、この言い方は正しい）を特定化し、その特定化された誤差を用いることで、新しい経済学的な知見が得られるかどうかを研究することである。特に、人々が期待値やそれに類するものを計算し、それを参考に経済行動を選択していることは大いにあり得る。また、人々の計算、特にさまざまな経済的な状況におけるそれは、経済主体にとって主観的なものになることの方が多くても容易に想像ができる。Ozaki (2009) では、さまざまな数学的な誤差の例を検討してい

るが、この中でも特に経済学への応用の観点からも興味深いと思われる非対称誤差を取り上げて、この経済学的意味を考察してみることが本研究では目指した。ここで、非対称誤差について、少し説明を加えておく。この誤差の測り方では、実際には 10 であったものを（10 であったことは後でわかる）15 と予測した時と、5 と予測した時とでは、予測者の誤差から受けるショックの度合いが異なるを考える。L2 誤差では、どちらも当然 5 であるが、例えば、過大評価を嫌う人（過大評価をしていたことにショックをより多く感じる人）というのはそれほど不自然な人間心理ではないであろう。このような場合には、例えば、過大評価した場合の誤差は $|10-15|$ と計算され、過小評価された場合には、 $|10-5|$ と誤差は計算される。過大評価を嫌う人の $|10-15|$ は 1 より大であると仮定してよいだろう。これとは逆に、時々証券市場で実際に観察される「強気の人々」は、1 より小さい $|10-5|$ を有していると考えられる。このように、 $|10-15|$ の値を 1 と異なると仮定することによって、より経済現象を緻密に分析できるモデルの校正できる可能性が大いに高まることが期待できる。

3. 研究の方法

非対称誤差関数を用いて拡張された期待値、および、拡張された意味での条件付けを計算する意思決定者を考察し、伝統的な意思決定論のフレームワークで、この誤算関数の導入がどのような新たな帰結をもたらすかを検討する。意思決定論では、当該の意思決定システムのパフォーマンスを調べるために用いられる「エルスバーグの実験」と呼ばれる有名な思考実験がある。（これについての実際の実験結果についても膨大な蓄積がある）そこで、本研究で提案された、非対称誤差を用いて意思決定を行っている経済主体が、この思考実験で、どのようなパフォーマンスを占めるかを分析する。実際に実験を行う方法とはならず、あくまで、理論的な分析を行うことにした。

4. 研究成果

(1) エルスバーグの実験をまず簡単に説明しておこう。実験の参加者は、賞金が当たるかもしれない 2 つの籤を見せられ、どちらを選ぶか決めるように迫られる。ここで、それぞれの籤で幾らの金額が当たるのかは、参加者が中の見えない袋の中から適当に引っ張り出したボールの色によって決まっている。それが赤ならば 1 万円、というように、である。エルスバーグ実験が特徴的なのは、袋の中のボールの色の内訳が参加者には知らされていないということである。例えば、赤いボールがいくつ入っていて、白いボールがいくつ入っているか、ということを知らない。次に参加者は、もう一組の異なる籤を見せられ、再度、どちらか一つを選ぶように迫られる。エルスバーグは、この実験を行うとほとんどの人はある決まった籤の選び方のパターン

を示すと主張した。つまり、最初に籤の組ではどちら、2番目の籤の組ではこちら、というふうに。そして、このことこそが「エルスバークの実験」を有名にしていることであるのだが、参加者が、袋の中のボールの内訳にどのような確率を割り振ったとしても、いま述べた頑健な選択のパターンは説明できない。

以上のことを、実際のエルスバークの実験を掲げて説明してみる。以下の図を見てほしい。

	R	B	W
f1	\$1,000	\$0	\$0
f2	\$0	\$1,000	\$0
f3	\$1,000	\$0	\$1,000
f4	\$0	\$1,000	\$1,000

ここで、R、B、W はそれぞれ、赤いボール、黒いボール、白いボールを表しており、中の見えない袋に、全部で 90 個のボールが入っている。そのうち、30 個は確実に赤いボールであることは参加者に分かっているものの、黒と白がどれくらいの割合で混入しているのかについて一切被験者は知らされていない。(極端な話、黒いボールはゼロ個かもしれない) f1 は一つの籤を表していて、赤を引くと \$1,000 貰え、黒か白を引くと一銭も貰えないことを示している。f1 とはそういう籤である。f2 から f4 も同様とする。さて、f1 と f2 の間の選択では、f1 を選ぶ参加者が圧倒的に多く、f3 と f4 の間の選択では、f4 を選ぶ参加者が圧倒的に多いというのが、エルスバークの思考実験の主張であり、かつ、実際に行われた実験で非常しばしば観察される結果である。

ところが、この結果は、人々が確率を使って計算し、その結果に基づいて行動しているとするならば、決して説明できないことがわかる。というのも、実は簡単で、f1 を選んだ人は、黒いボールは高々 29 個しか袋の中にはない、と考えたはずである。赤いボールが 30 個あることは知っているのであるから。しかし、黒いボールが高々 29 個しかその袋に入っていないとするならば、白いボールは最低でも 31 個はあることになる。であれば、f3 の方が、f4 よりも良いことになってしまう。

つまり、人々は確率を用いた掲載を行って日々の選択を行っている、と仮定することにはあまり根拠がない、というのが以上の話から結論できる意思決定論では有名な事実である。なお、エルスバークの実験を説明できる意思決定理論として Schmeidler や Gilboa の CEU 理論や MEU 理論が有名であるが、これらは、確率には似ているものの実は確率ではない(確率が満たさなければならぬ「加法

性」という条件を満たしていないという意味で)ものを意思決定者が用いて計算を解いていると仮定する(CEU 理論)か、意思決定者が、一つではなく複数の確率を用いて、その中で最悪のシナリオを想定して期待値を計算する(MEU 理論)というものである。

(2) それでは、本研究で明らかになったことを書く。まず、意思決定者は袋の中のボールについて、普通の意味の確率をしっかりと割り振っていると仮定する。赤いボールは 30 個入っている。これは保障されている。また、黒と白のボールも、それぞれ、いくつか入っていて、その数を加えたとし 60 個になる。先に示したことから、このままでは、エルスバークの実験で示された選好パターンは絶対に観察されない。そこで次に、意思決定者は非対称誤差を用いて、拡張された期待値の計算、拡張された条件付き確率を計算し、自らの行動を選択すると仮定する。さらに、彼女は過大評価を嫌うタイプであることを仮定する。先ほどの記号を用いると、 <1 である。さらに、これが最も重要なのであるが、彼女はボールを引っ張り出す前に、ボールをつかんだ瞬間に追加的な情報が得られると期待していると仮定する。しかも、この情報は、彼女が手にした(しかし、彼女本人はその色をまだ確認していない)ボールの色が、赤なのか、赤ではないのかわかってしまうような、部分的な情報であるとする。(黒か白かはまだわからない)これは、本当に追加的な情報が得られるかどうかとは全く関係なく、彼女がそのように思い込んでいるだけでよい。例えば、彼女がボールをつかんだ瞬間、何らかの仕組みで、その色が実験者(実験を行っている人)に分かる仕組みになっていて、その結果を知った実験者の彼がほくそえむだろうとか、彼女が実は赤いボールはひそかにざらざらしていると思い込んでいるとか、何でもよい。彼女がそう思い込んでいることだけがここでは重要である。

最後に、この追加情報が将来に得られることを織り込んで、現在、手を袋の中に入れる前に、(拡張された)条件「なし」期待値の計算を非対称誤差最小化によって行うとし、この期待値の大小に応じて、彼女が最終的な籤の選択を決めると仮定する。

このとき、驚くべきことに、彼女の 2 つの籤の組に対する選択パターンと、エルスバークの実験における選択パターンは完全に一致する。

(3) 前項で述べた結果は、(筆者の知る限り)初めて、確率がある状態でエルスバークの実験結果と整合的な結果がえられた最初のケースである。この結果は、2 つの意味で、大きな意義を持っていると考えることができよう。第 1 に、エルスバークの実験結果を再現するために、加法性を満たさない「変則的な」確率(もどき)を話に持ち込む必要がないし、また、複数の確率を想定した意思決定者が、その中で最悪のシナリオを想定して行

動すると仮定する必要もない。伝統理論と同じように、唯一の加法的な確率で表現される信念をもつ意思決定者を想定しつつ、エルスバークの実験結果を無理なく説明することが可能である。

第2の重要な点は、「条件付け」という概念を一般化することの積極的な意義が見いだせたということである。Ozaki(2009)は数学的には非常に綺麗な結果ではあるものの、経済学への応用という観点からすると、まだまだ十分な展開がなされていなかったと言えるかもしれない。しかし、本研究は、このような拡張の仕方が非常にもっともらしい(経済学の有名なパラドックスを自然に説明できるという意味で)ことが示されたと同時に、意思決定論における本研究そのもののさらなる発展が望まれることに加え、エルスバークの実験的な選択状況が発生しそうなその他の経済学的現象についても、その説明能力が高いであろうことを限りなく予感させることにおいても、十分にその意義が認識されてよい、と考える。この「条件付き」概念は、申請が独自に開発したもので、まだまだその研究はその端緒にあるとあってよいが、今後、研究プロジェクトとして発展していくためにも、広く、公開をしていきたい。特に、この結果は、尾崎の近著(西村清彦との共著)、Economics of Pessimism and Optimism: Theory and Applications of Knightian Uncertaintyの13章に書きおろしとして収録される予定である。この結果をさらに拡張し(一般化し)単独の論文として完成させたいと考えている。また、このかたちでの研究成果の公開を各種ワークショップで積極的に報告を行うなどして、さらに展開していく予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

1. 尾崎裕之、「解説：有限次元の世界の「滑らかさ」- フレッシュ微分とガトー微分」、『三田学会雑誌』、査読なし、109 巻、2017 年、127 - 148 .
2. 尾崎裕之、「解説：行列の固有値と経済動学」、『三田学会雑誌』、査読なし、108 巻、2015 年、201 - 233 .
3. Eisei Ohtaki and Hiroyuki Ozaki, Monetary equilibria and Knightian uncertainty, *Economic Theory*, 査読あり、59 巻、2015 年、435-459.

[学会発表](計 2 件)

1. Hiroyuki Ozaki, Recursive H-J-B equation, Mathematical Economics 2017 @ Keio, 2017 年 3 月 17 日~3 月 18 日、慶應義塾大学(東京都港区)

2. Hiroyuki Ozaki, Optimality in a stochastic OLG model with ambiguity, Mathematical Analysis in Economic Theory, 2015 年 11 月 25 日~11 月 27 日、京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

[図書](計 1 件)

1. Nishimura G. Kiyohiko and Hiroyuki Ozaki, Springer, Economics of Pessimism and Optimism: Theory and Applications of Knightian Uncertainty, 2017 (予定)、400 ページ(予定)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]

ホームページ等
<http://web.econ.keio.ac.jp/staff/ozaki/>

6. 研究組織

- (1) 研究代表者
尾崎 裕之 (OZAKI, Hiroyuki)
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：90281956

(2) 研究分担者 ()

研究者番号：

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：

(4) 研究協力者 ()