

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 21 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26381191

研究課題名(和文) 中学校数学科における証明をよむことについての学習指導法の開発

研究課題名(英文) Development of teaching methods focused on reading comprehension of proof(s) in lower secondary school mathematics

研究代表者

茅野 公穂 (CHINO, Kimiho)

信州大学・学術研究院教育学系・教授

研究者番号：20400658

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、中学校数学科において証明をよむことについての学習指導法を開発することである。そのために、暫定版学習指導法を開発、実施し、学習指導法の改善点を特定し、学習指導法に反映した。本研究の成果として、とりわけ、用語「証明」を学習する以前の学習指導法として、中学校第1学年の単元「基本の作図」(計7時間)の学習指導法、及び中学校第2学年の文字を用いた式の利用(計6時間)の学習指導が開発された。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to develop teaching methods focused on reading comprehension of proof(s) in lower secondary school mathematics. To achieve this purpose, we developed and implemented the provisional teaching methods, identified the improvement points of the teaching methods, and reflected them in the methods. As results of this research, especially focus on teaching methods before learning the term "proof", teaching methods for a unit "Geometric Construction" (total of 7 hours) in the first grade of lower secondary school, and teaching methods for a unit "Algebraic Expressions"(6 hours in total) in the second grade were developed.

研究分野：数学教育学

キーワード：学校数学 証明 学習指導法

### 1. 研究開始当初の背景

証明をよむことの必要性・重要性は認められているが、子どもたちの学習状況は望ましい状況になく、学習指導の改善が喫緊の課題である。証明をよむことの必要性・重要性は認められており、例えば、中学校学習指導要領数学において第2学年B(2)ウに「図形の性質を読んで新たな性質を見だし」が位置付けられている。しかし、全国学力・学習状況調査等の結果は、子どもたちの学習状況は望ましい状況にないことを示している(国立教育政策研究所教育課程研究センター, 2012 など)。

しかし、中等教育段階の生徒と授業を対象にした証明をよむことに関する学習指導法の開発とその効果の検証がまだ十分議論されていない。論(argument(s))がある事柄の証明を構成するか否かを学習者は判断できるか否かに着目する研究(Alcock & Weber, 2005; Selden & Selden, 2003 など)や、証明の読解(reading comprehension of proofs)に着目する研究(Lin & Yang, 2007; Yang & Lin, 2008)もあるが、いずれも教室での授業における子どもの活動を対象としたものではない。また、対象生徒が大学生である場合もある。したがって、前期中等教育段階において、どのような学習指導のもとでより望ましい学習が実現するのかについては、少人数の半構造化インタビューの結果、あるいはペーパーテストの結果からの推定に留まっている。

また、各教科書において、証明をよむことに関わる問題は数題にすぎず、証明をよむことに関する学習指導は教師に委ねられている現状がある。さらに、「課題探究として証明すること」においては、ある事柄の推測・証明の構想・証明の構成・証明(所産)と証明すること(過程)の評価・改善(・発展)が想定されているが、証明を構想・構成できないために、評価・改善にたどり着けない学習状況もみられる。

そこで、「課題探究として証明すること」をより豊かな活動として実現するために、与えられた証明を評価・改善することで、新たな事柄の生成や別証明の構想・構成へと活動を展開するための教材群や学習指導法を提供する。この学習は、自ら構成した証明に対しても有効に働くことが期待される。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、中学校数学科において証明をよむことについての学習指導法を開発することである。

### 3. 研究の方法

まず、「証明をよむこと」の概念を規定する。次に、「課題探究として証明すること」をより豊かな活動として実現するための学習指導法を開発するための原理・原則を設定する。また、この開発原理・原則に基づいた

学習指導法(暫定版)を開発する。次いで、この暫定版学習指導法を実施し、学習指導法の改善点を特定し、改訂版学習指導法を開発する。最後に、改訂版学習指導法の実施による効果の検証を踏まえて更なる改善点を特定し、学習指導法に反映する。なお中学校3年間に渡る意図的・計画的な学習指導において、用語「証明」を学習する以前の学習指導法の開発が急務と考え、領域「図形」では中学校第1学年、領域「数と式」では中学校第2学年に焦点をあてた。

### 4. 研究成果

#### (1) 「証明をよむこと」の概念規定

証明をよむ対象には少なくとも大きく2つの側面「証明中の内的整合性」、「事柄と証明の整合性」がある。具体的には、「証明の論理的妥当性を評価し、間違いを正すこと」、「当初の事柄に対して、証明に事柄とのずれや矛盾がないこと」、「証明に対して、証明とのずれや矛盾がないように事柄を(再)定式化したり生成したりすること」、「証明に基づいて新しい性質を見いだすこと」などが該当する。

#### (2) 証明をよむことについての学習指導法を開発するための原理・原則(暫定版)の設定

単元における学習指導において、まず、証明を構成しているパーツを対象に証明をよむことを、次いで、構成しようとする過程を対象に証明をよむことを位置付けることとした。教師と生徒、また生徒間で、目指す証明を共有するためである。

また、単元における学習指導において、証明の妥当性を吟味することを単元の最初から位置付けることとした。証明を構成することと証明の妥当性を評価することとの互恵的な関係を活かすためである。結果、各単元においては、生徒が構成した素朴な証明を対象に、一斉授業の形態で不十分な点を指摘し、修正する活動を単元の初期に位置付けるようにした。

さらに、単元の途中からは証明に基づいて発展的に考えることを位置付けることとした。

#### (3) 領域「図形」における学習指導法

中学校第1学年の単元「基本の作図」(計7時間)の学習指導案と各授業の学習指導の重点をまとめた単元の学習指導案および具体的な学習指導に関わる手立てを明確にした。

この単元計画の特徴は、以下の四点である。

第一に、単元に渡る学習問題「三角定規の形(60°, 90°, 30°)を正確にかこう」を考案し、どの角から作図したらよいか検討することを通して60°の大きさの角の作図へと導くことにした。60°の大きさの角の作図を取り上げたのは、正三角形を作図すればよさそうという見通しの立てやすさと、正三角

形を作図する手順を三つの辺を等しくしたと解釈しやすいこと、三つの辺を等しくしたことと結果として  $60^\circ$  の角が構成されることの区別のしやすさからである。次いで垂線の作図を単元に位置付けることとした。

第二に、証明に必要な構成要素を顕在化するために、四観点「行ったこと」、「使う図形」、「結果としてなったこと」、「言いたいこと」を採り入れた。四観点は、「行ったこと」は前提、「言いたいこと」は結論に、それぞれ対応する。「使う図形」と「結果としてなったこと」は、前提と結論の間に命題の演繹的な連鎖を形づくり表現する際の骨子となるパーツに対応する。より具体的には、四観点は、どのような性質（「行ったこと」）に基づいて図形（「使う図形」）を構成し、その図形（「使う図形」）のどのような性質（「結果としてなったこと」）により結論が導かれるか、という論を構成するパーツとなる。この四観点からみて不十分な証明を共同追究で取り上げ、自ら構成した素朴な証明を評価・改善する活動を授業に位置付ける。本単元では、「行ったこと」と「結果としてなったこと」の区別を一貫して強調する。この区別によって、図形の性質を徐々に論理的な関係から整理するように生徒を促すためである。また、「行ったこと」と「結果としてなったこと」の区別へのいざないは、作図手順の正当化の文脈から始め、さらに、単元当初から生徒が構成した素朴な証明を上記観点から修正する活動を強調する。

第三に、作図手順の発見の文脈と正当化の文脈をバラエティ豊かに単元に位置付けるために、(a)授業クラスで定着しているキャラクターによって提示された角の二等分線の作図手順の正当化、(b)角の二等分線の作図手順を参考にした、直線  $XY$  上にある点  $O$  を通る垂線の作図手順の発見、を採り入れた。

第四に、垂直二等分線の作図技能の習熟を図る中で、ひし形に着目した正当化の意義を考える場を設けた。具体的には、二つの正三角形を組み合わせた形としてのひし形に留まらず、ひし形なら作図できるのかという探究を誘発すべく問題をデザインした。

上述の四つの特徴により、単元に以下の少なくとも五つの学習活動が含まれることになる。五つは、作図手順の数学的な解釈、前提と結論の区別、証明の構成要素の顕在化、証明の構成要素に基づく証明の評価・改善、証明の構成要素を踏まえた証明の構成、である。

研究協力者との平成 26 年度と平成 28 年度の授業実践に基づき、上記五つの学習活動が実現可能であることが検証されるとともに、次の二つの成果が明らかになった。まず、設定した四観点に基づき自ら構成した素朴な証明を評価・改善する活動は、証明に必要な内容を教師・生徒、生徒間で共有することを促すこと、である。次に、四観点は、徐々に証明を構想する際にも用いられるようにな

り、証明の構成を誘発すること、である。

さらに、授業実践に基づく吟味から、今後の課題として、第 1 学年から第 3 学年にかけて通時的なエビデンスを収集し、子どもたちの学習活動の質の向上の様相を一層明らかにすること、が明らかとなった。

#### (4)領域「数と式」における学習指導法

中学校第 2 学年の文字を用いた式の利用（計 6 時間）の学習指導案と各授業の学習指導の重点をまとめた単元の学習指導案および具体的な学習指導に関わる手立てを明確にした。

この単元計画の特徴は、以下の三点である。

第一に、数の性質を、文字を用いて表し定式化する際に、何をどうしたのかを顕在化することを強調している点である。定式化のために何をどうしたのかを顕在化するために、学習シートに吹き出しを設けるとともに、典型的な誤答としての定式化を対象にその正誤を子どもたちが判断する場を授業に位置付ける。

第二に、前提を表す文字を用いた式と、結論を表す文字を用いた式とが等しくなることの説明を考える際に、等しいことを説明することを重視し、子どもの素朴な説明にみられた 3 つの考えの進め方を授業に積極的に位置付けることである。三つは、前提を表す文字を用いた式を式変形して結論を表す文字を用いた式とすること、前提を表す文字を用いた式と結論を表す文字を式変形するとともに同じ文字式となること、結論を表す文字を用いた式を導くためにはどんな式が必要になるかを考え結論から遡ること、である。

第三に、一つの事柄の正当化（証明）を終えた後に、目的に応じた式変形という観点から吟味し直し、他の事柄の正当化への見通しを立てることを強調する。これは、数の性質の発見の文脈では複数の事柄を子どもたちが見いだすことに配慮するとともに、文字を用いた式を利用する正当化の生産的な側面を顕在化するためである。

研究協力者との平成 28 年度の授業実践に基づき、上記三つのねらいからみて相応しい学習活動が実現可能であることが検証されるとともに、次の二つの成果が明らかになった。まず、数の性質を、文字を用いて表し定式化する際に、連続する自然数にはどんな性質があるのか等、一層数の性質へ焦点化することが促進されたことである。次に、前提を表す文字を用いた式と、結論を表す文字を用いた式とが等しくなることの説明をする際の考えの進め方を顕在化したことにより、その考えの進め方の子どもたちの自覚的な活用を促進すること、である。

また、授業実践に基づく吟味から、今後の課題として、領域「図形」同様、第 1 学年から第 3 学年にかけて通時的なエビデンスを収集し、子どもたちの学習活動の質の向上の様相を一層明らかにすること、が明らかとな

った。さらに、「図形」あるいは「数と式」という、それぞれの領域に強く依存する学習指導法をより顕在化すること、である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Miyazaki, M., Nagata, J., Chino, K., Fujita, T. Ichikawa D., Shimizu, S, & Iwanaga Y. (2016). Developing a Curriculum for Explorative Proving in Lower Secondary School Geometry. *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. 査読有  
<http://hdl.handle.net/10091/00019449>.

茅野公穂, 宮川健 (2016). 課題探究として証明することのカリキュラム開発: 領域「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化. 『日本数学教育学会 第4回春期研究大会論文集』, 163 - 166. 査読無

茅野公穂, 佐々祐之, 宮崎樹夫, 宮川健, 中川裕之, 岩永恭雄, 松岡樂 (2015). 課題探究として証明することのカリキュラム開発: 領域「数と式」, 「図形」のカリキュラム開発枠組みの精緻化. 日本数学教育学会第3回春期研究大会論文集, 7-12. 査読無

茅野公穂, 嶋田和美, 荻原啓一 (2014). 「基本的な作図」において課題探究として証明することの授業化. 日本数学教育学会誌「数学教育」, 96(9), 10-13. 査読有

宮崎樹夫, 永田潤一郎, 茅野公穂 (2014). 中学校数学における課題探究として証明することのカリキュラム開発: 進行状況と授業化の意味・役割. 日本数学教育学会誌「数学教育」, 96(9), 2-5. 査読有

[学会発表](計1件)

茅野公穂, 清水あかね (2015). 中学校数学における課題探究として証明することの授業化: 第1学年の小单元「基本的な作図」. 日本科学教育学会第39回年会. 2015年8月23日, 山形大学.

[図書](計1件)

Shimizu, S. & Chino, K. (2015). History of lesson study to develop good practice in Japan. In M. Inprasitha, M. Isoda, B.-H. Yeap, & P. Wang-Iverson (Eds.), *Lesson Study: Challenges in Mathematics Education* (pp. 123-140). World Scientific.

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

茅野 公穂 (CHINO, Kimiho)  
信州大学・学術研究院教育学系・教授  
研究者番号: 20400658