

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：17101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26381219

研究課題名(和文) 中学校数学科「関数」領域における課題探究型の説明学習に関する基礎的研究

研究課題名(英文) fundamental study on the teaching and learning of explorative proving in function area of junior high school mathematics

研究代表者

岩田 耕司 (IWATA, Koji)

福岡教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：90437541

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、中学校数学科「関数」領域における「証明すること」を「関数を活用して予測したり、解釈したりした結果を正当化すること」と規定し、その規範を構築するとともに、領域「関数」における証明の学習水準やその移行過程を明らかにした。また、中学校第2学年と第3学年の生徒の記述表現を分析するとともに、中学校第1学年を対象とした授業実践を試行的に実施した。その結果、定式化(formulate)や解釈(interpret)の記述に関しては上位レベルを達成している生徒の割合が極めて少ないこと、水準の移行を意図した授業では、発見と正当化の文脈を明確に切り分けて指導することが重要であることなどが明らかとなった。

研究成果の概要(英文)：In this study, I defined the “proving” in function area of junior high school mathematics as “justifying the prediction or interpretation produced by using functions” and built the criteria for the proving. And then, I proposed the levels and course of its learning. In addition, I analyzed the descriptive representations of junior high school second and third graders to the problem which ask them to justify prediction produced by using function, and teaching practices for first graders were empirically carried out. As a result, it was found that there were extremely few students who achieved the higher levels of proving in terms of describing the formulation and interpretation processes. And regarding the practices, the importance of dividing the teaching phases into the contexts of discovery and justification was found.

研究分野：数学教育学

キーワード：関数 証明 説明 数学的モデル化 中学校数学

1. 研究開始当初の背景

(1) 教育に関する認識

我が国の中学校数学科における関数の学習状況は決して望ましい状態にあるとは言えず、その改善は重要な課題である。平成20年に告示された中学校学習指導要領では、数学的活動をより一層充実し、言語活動や体験活動を重視した指導が行われるよう、各学年の内容に、指導すべき数学的活動が例示され、その一つに「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」が挙げられた(文部科学省、2008)。しかしながら、中学校数学科の4領域で比較した際、「数と式」や「図形」領域では「文字式による説明」や「図形の性質の証明」といった、数学で求められる望ましい説明の姿が典型的に存在するが、「関数」や「資料の活用」領域ではそのような望ましい説明の姿が明確に存在しているわけではない。それゆえ、授業においてどのような説明を子どもに求めるか、求めないかは、各教師の判断に委ねられており、説明学習による指導の効果が十分に得られていないと考えた。

(2) 研究に関する認識

研究開始当時の数学教育学研究では、学校数学における「課題探究型の説明学習」の必要性が国際的にも認知され始めており(宮崎・藤田、2013)、課題探究型の説明を取り入れることによって数学の学習状況の改善を図る試みが国内外で行われていた。しかしながら、関数指導に関する研究では、比例概念や表・式・グラフの関連など、関数概念がどのように発達するかに関心を当てた研究や、数学的モデル化に関する教材開発などは数多くなされているものの、課題探究型の説明や言語の力に着目し、言語の視点から指導の改善を試みる研究はあまり見られなかった。それゆえ、中学校数学科における関数の学習状況の改善に向けて、まずは中学校数学科「関数」領域における「課題探究型の説明学習」を検討するための基礎的な資料を収集する必要があると考えた。

2. 研究の目的

以上のような認識のもとに本研究では、次の3つの研究課題に取り組むことを通して、中学校数学科の関数領域における課題探究型の説明学習や、その学習軌道を理論的・実証的に明らかにするための基礎的資料を得ることを目的とした。

研究課題1: 中学校数学科の関数領域における課題探究型の説明学習として望ましい説明の姿や、その姿へ近づけていくための学習軌道を仮説的に設定し、研究の枠組みを構築する。

研究課題2: 研究の枠組みに基づいて、関数領域における子どもの説明の実態を、量的調査を通して明らかにする。また、その結果から、仮説的な学習軌道の妥当性を検証し、必要に応じて修正を行う。

研究課題3: 修正された学習軌道をもとに、説明の水準の移行を図る段階(学年と学習内容)を特定し、その段階における典型的な教材や授業展開を検討・開発する。また、授業実践を通して、それらの効果を検証し、学習軌道全体を実証的に検討するための基礎的資料を得る。

3. 研究の方法

本研究の方法は、大きく「文献解釈的手法」と「記述式問題を用いた量的調査」、「授業実践による質的調査」の3つに分類することができる。

(1) 文献解釈的手法

数学的モデル化や数学的活動のプロセスモデルに関する先行研究を考察し、関数の学習活動において核となるプロセスを特定することで、関数領域における課題探究型の説明学習において求められる説明やその要件を明らかにする。また、中学校数学科の検定済み教科書の記述内容を分析することで、関数領域における課題探究型の説明学習の現状を把握する。さらには、授業実践の対象となる学習内容について、中学校数学科の検定済み教科書や教師用指導書、その他関連する文献・資料等を用いて検討し、授業実践の計画を立案する。

(2) 記述式問題を用いた量的調査

研究の枠組みに基づいて、関数領域における子どもの説明の実態を明らかにするための測定用具(記述式の調査問題とその解答に対する評価規準)を開発し、中学校第2学年と第3学年を対象とした量的調査を実施する。

(3) 授業実践による質的調査

説明の学習水準の移行を図る段階(学年と学習内容)を特定し、その中から対象を絞って試行的に授業実践を行う。具体的には、対象となる水準の移行を可能にするための教材や授業展開を検討・開発し、授業実践を通してそれらの効果を検証する。分析対象は、VTRによって記録され、プロトコルに起こされた授業の様子と、授業後に回収し複写した生徒のワークシートの記述である。

4. 研究成果

本研究の主要な成果は、以下の諸点である。

(1) 説明の規範の構築

関数指導の一つの大きなねらいは、関数的な見方や考え方を養うことであり(文部科学省、2008)、本研究では、このような関数指導の意義に鑑み、領域「関数」における証明の対象としての「事柄」や「事柄の生成」を、「関数の性質に関する命題を予想すること」だけでなく、「具体的な事象に関する観察や実験の結果を関数とみなすことによって未知の状況を予測したり、事象を解釈したりすること」も含めて捉えることにした。その上で、特に本研究では後者の活動に焦点を当て、

本研究で考察の対象とする「証明すること」を「関数を活用して予測したり、解釈したりした結果を正当化すること」と規定した。

次に、そのような正当化に必要な条件（証明の要件）を考察した。数学的証明において、推論の過程の適切さが検証の対象であることと同様に、解釈や予測の正当化に関しても、その結論を導くまでの過程が適切かどうかの検証が必要不可欠である。そのような、関数を活用して予測したり、解釈したりする過程は一般に、数学的モデル化の過程とみることができ、それゆえ、本研究で考察の対象とする証明の要件は、数学的モデル化の過程を視点に具体化できる。以上のような考えのもとに、本研究では、領域「関数」における証明の要件を、数学的モデル化の主要な過程である定式化（formulate）、運用（employ）、解釈（interpret）という3つの過程（例えば、三輪, 1983; OECD, 2013）から具体化し、次のようにレベル化した。

《定式化（formulate）の正当化》

- F1. 課題解決に用いる関数を示す。
- F2. 課題解決にその関数を用いることの妥当性を、数学的根拠に基づいて示す。
- F3. 課題解決にその関数を用いることの妥当性を、理想化・単純化等に言及し、数学的根拠に基づいて示す。

《運用（employ）の正当化》

- E1. データから数学的結果を導く数学的処理の過程を記述する。
- E2. データから数学的結果を導く数学的処理の過程を、用いた数学的モデルを明示して記述する。

《解釈（interpret）の正当化》

- I1. 数学的結果を解釈した結果を示す。
- I2. 数学的結果を解釈した結果を示すとともに、解釈した結果には制約が伴うこととその要因について記述する。

(2) 説明の記述に関する実態調査

平成19年度に全国学力・学習状況調査中学校数学で出題された「水温の変化」の問題を参考に、子どもの説明の実態を明らかにするための測定用具（記述式の調査問題とその解答に対する評価規準）を開発し、国立大学附属中学校の第2学年と第3学年の生徒を対象とした量的調査を実施した。調査の実施時期は平成26年12月中旬であり、各学年とも調査前に関数領域の学習を終えていた。被験者の人数はそれぞれ61名と62名である。

表1と表2はそれぞれ第2学年と第3学年の生徒の記述の分析の結果を表している。表1,2から分かるように、定式化（formulate）、運用（employ）、解釈（interpret）という3つの観点のうち、運用に関する記述については上位レベル（E2レベル）を達成している生徒の割合が中学校第2学年で73.8%（61人

表1. 中学校第2学年の記述の分析結果

	定式化 (F)	運用 (E)	解釈 (I)
L3	0.0% (0)	-	-
L2	3.3% (2)	73.8% (45)	3.3% (2)
L1	8.2% (5)	6.6% (4)	13.1% (8)
0	88.5% (54)	19.7% (12)	83.6% (51)
計	100.0% (61)	100.0% (61)	100.0% (61)

表2. 中学校第3学年の記述の分析結果

	定式化 (F)	運用 (E)	解釈 (I)
L3	0.0% (0)	-	-
L2	9.7% (6)	83.9% (52)	6.5% (4)
L1	27.4% (17)	1.6% (1)	16.1% (10)
0	62.9% (39)	14.5% (9)	77.4% (48)
計	100.0% (62)	100.0% (62)	100.0% (62)

中45人),第3学年で83.9%(62人中52人)と高い傾向がみられるものの、定式化や解釈に関する記述については、上位レベル(F3もしくはI2)を達成している生徒の割合は、中学校第2学年、第3学年ともに極めて少ないことが分かった。このことは、領域「関数」における証明の学習において、水準の移行を図るための教材開発や授業開発が急務であることを示唆している。

(3) 説明の学習水準の移行過程の設定

中学校数学科の領域「関数」において、目標となる証明は、定式化(F)、運用(E)、解釈(I)それぞれについて、前述のF3, E2, I2の要件を同時に満たす証明(以後、(F3; E2; I2)レベルの証明のように略記する)である。しかしながら、このような証明を生徒がすぐに構成できるようになるとは考え難しく、前述の実態調査からも示唆されるように、その学習には相当の困難が伴うことが予想される。それゆえ、このレベルに至るまでの段階を意図的に仕組む必要があり、本研究ではその段階を次の3つの段階で捉えることにした。

C1: 証明の「骨格」を学ぶ段階で、(F1; E1; I1)レベルの証明を構成することを意図する段階。

C2: 学んだ証明の「骨格」に肉付けしていく段階で、主として数学的根拠の質を高めることを意図し、(F2; E2; I1)レベルの証明を構成することを意図する段階。

C3: C2レベルに加え、主として理想化・単純化の視点から記述の質を高めることを意図し、(F3; E2; I2)レベルの証明を構成することを意図する段階。

例えば、紙の枚数を比例を用いて見積もる問題で言えば、C1からC3レベルの学習水準

の意図する説明（証明）の記述は以下のようになる。

[問題] 同じ種類の紙がたくさんあり、その枚数を見積ります。この紙の10枚、30枚の重さを測ったら、それぞれ70gと210gでした。この紙全部の重さが4760gのとき、この紙全部の枚数はおよそ何枚ですか。

学習水準 C1 で意図する記述例

(F1) 紙の枚数は重さに比例するので

$$(E1) 4760 \div 70 = 68$$

$$10 \times 68 = 680$$

(I1) 680 枚

学習水準 C2 で意図する記述例

(F2) 枚数が2倍、3倍になると、重さも2倍、3倍になるので、

(F1) 紙の枚数は重さに比例する。

(E2) x 枚のときの紙の重さを y g とすると $y = 7x$

(E1) $y=4760$ を代入すると、 $x = 680$

(I1) 680 枚

学習水準 C3 で意図する記述例

(F3) 紙がすべて同じ重さと仮定すれば

(F2) 枚数が2倍、3倍になると、重さも2倍、3倍になるので、

(F1) 紙の枚数は重さに比例するとみなすことができる。

(E2) x 枚のときの紙の重さを y g とすると $y = 7x$

(E1) $y=4760$ を代入すると、 $x = 680$

(I2) 比例とみなしているのだから、およそ

(I1) 680 枚

また、証明を自律的に構成できるようになるためには、証明の構成の学習だけでなく、証明を構想する学習も必要となる。そのような、証明の構想の学習レベルとしては、上述の C1、C2、C3 の学習レベルそれぞれに対応する形で以下の3つの学習レベルを設定することにした。

P1: 前提と結論を結び付けるために必要な関数とその用い方を、数学的モデル化の各過程を視点として探る。

P2: 前提と結論を結び付けるために必要な関数とその用い方を、数学的モデル化の各過程における正当化の要件を視点として探る。

P3: 前提と結論を結び付けるために必要な関数とその用い方を、数学的モデル化の過程を視点として探る。

(4) 授業実践による検証

学習水準の移行過程全体を実証的に検討するための基礎的資料を収集することを目的に、中学校第1学年を対象とした授業実践を試行的に計画・実施した。意図する水準の移行は、学習レベル 0 から学習レベル (P2, C2) への移行であり、対象となる学習内容は

「比例と反比例」である。

事前検討の結果、水準の移行を意図した場合、用いる題材としては、比例の素材ではなく反比例の素材を用いた方がよいことや、授業の展開としては、0 から (0, C2) への移行を図る段階と (0, C2) から (P2, C2) への移行を図る段階との2つの段階に分けて授業を構成する方がよいことなどが仮説的に明らかとなった。

また、事前検討の結果を受けて開発した教材や授業展開をもとに、0 から (0, C2) への移行と (0, C2) から (P2, C2) への移行を意図した授業実践を、国立大学附属中学校 2 校において実施した。実施時期は平成 29 年 2 月下旬であり、中学校第 1 学年の学習内容を一通り終えた後に、課題学習として実施した。その結果、特に 0 から (0, C2) への水準の移行を意図した授業においては、発見の文脈と正当化の文脈を明確に切り分けて指導することの重要性が示唆された。さらには、説明（証明）の規範を指導する際に、どのような説明がよい説明であるか、といったよい説明（証明）に対する規範を生徒から引き出すための指導の手立てが必要であることも明らかとなった。

一方、(0, C2) から (P2, C2) への移行を意図した授業においては、前時で構成した説明に必要な 3 つの要素（「用いた関数とその数学的根拠」、「数学的モデルとその用い方」、「予測した結果」）を視点とし、説明（証明）を構想することが、説明（証明）を自律的に構成するための一つの有効な手立てになることが分かった。

(5) 研究の総括と今後の課題

本研究では、中学校数学科「関数」領域における「証明すること」を「関数を活用して予測したり、解釈したりした結果を正当化すること」と規定し、そのような正当化に必要な条件（証明の要件）を考察することで、領域「関数」における説明の規範を構築した。

次に、その規範をもとにして、中学校第 2 学年と第 3 学年の生徒を対象とした量的調査を実施し、領域「関数」における生徒の記述表現の現状を分析した。その結果、運用 (employ) の記述については上位レベルを達成している生徒の割合が高いものの、定式化 (formulate) や解釈 (interpret) の記述に関しては上位レベルを達成している生徒の割合が極めて少ないことが明らかとなった。

最後に、それらの結果を踏まえ、領域「関数」における説明の学習水準を設定するとともに、学習水準の移行過程全体を実証的に検討するための基礎的資料を得ることを目的として、中学校第 1 学年を対象とした授業実践を試行的に実施した。その結果、特に 0 から (0, C2) への水準の移行を意図した授業においては、発見の文脈と正当化の文脈を明確に切り分けて指導することの重要性や、説明（証明）の規範を指導する際に、どのよう

な説明がよい説明であるか、といったよい説明（証明）に対する規準を生徒から引き出すための指導の手立てが必要であることなどが明らかとなった。

今後は、これらの成果をもとに、学習水準の移行過程に基づき意図される学習活動を実際の授業として具現化し、学年ごとの指導の系列として組織化するとともに、その移行過程全体を実証的に明らかにすることが重要な課題であると考えている。

[引用・参考文献]

宮崎樹夫・藤田太郎.(2013). 課題探究として証明することのカリキュラム開発 - 我が国の中学校数学科における必要性と、これまでの成果 - . 日本数学教育学会『第1回春期研究大会論文集』, pp. 1-8 .

三輪辰郎.(1983). 数学教育におけるモデル化についての一考察 .『筑波数学教育研究』, 第2号, pp. 117-125 .

文部科学省.(2008). 『中学校学習指導要領解説数学編』, 教育出版 .

OECD.(2013). PISA 2015 draft mathematics framework. Retrieved from http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft_PISA_2015_Mathematics_Framework.pdf

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計7件)

岩田耕司, 宮崎樹夫, 牧野智彦, 藤田太郎, 課題探究として証明することのカリキュラム開発 - 領域「関数」における学習レベルとその移行 - , 日本数学教育学会『第4回春期研究大会論文集』, 査読無, 2016, pp. 167-172 .

岩田耕司, 清水美憲, 複数の事象の関係を捉え統合する過程の分析, 日本数学教育学会『第4回春期研究大会論文集』, 査読無, 2016, pp. 243-248 .

岩田耕司, 宮崎樹夫, 牧野智彦, 藤田太郎, 課題探究として証明することのカリキュラム開発 - 領域「関数」における証明の構成の学習レベル - , 日本数学教育学会『第3回春期研究大会論文集』, 査読無, 2015, pp. 13-18 .

岩田耕司, 数学的な表現を通して他者と関わる活動とその評価に関する一考察, 日本数学教育学会『第3回春期研究大会論文集』, 査読無, 2015, pp. 135-142 .

岩田耕司, 隠れた学力観とその顕在化による可能性 - 全国学力・学習状況調査(中学校数学)にみる学力観 - , 日本数学教育学会『第2回春期研究大会論文集』, 査読無, 2014, pp. 5-12 .

岩田耕司, 林田真姫, 西岡和成, 中学校数学における課題探究として証明することの授業化 - 第1学年の単元「空間図形」 - , 日本科学教育学会『第38回年会論文集』, 査読無, 2014, pp. 157-160 .

岩田耕司, 「空間図形の平面上への表現と読み取り」において課題探究として証明することの授業化, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 査読無, 第96巻, 第9号, 2014, pp. 14-17 .

[学会発表](計7件)

Iwata, K., Learning of Application of Functions through Constructing Proofs, 13th International Congress on Mathematical Education, 26 July 2016, Hamburg, Germany.

岩田耕司, 課題探究として証明することのカリキュラム開発 - 領域「関数」における学習レベルとその移行 - , 日本数学教育学会第4回春期研究大会 2016年6月12日, 埼玉大学大久保キャンパス(埼玉県さいたま市).

岩田耕司, 複数の事象の関係を捉え統合する過程の分析, 日本数学教育学会第4回春期研究大会, 2016年6月12日, 埼玉大学大久保キャンパス(埼玉県さいたま市).

岩田耕司, 課題探究として証明することのカリキュラム開発 - 領域「関数」における証明の構成の学習レベル - , 日本数学教育学会第3回春期研究大会, 2015年6月28日, 東京理科大学(東京都新宿区).

岩田耕司, 数学的な表現を通して他者と関わる活動とその評価に関する一考察, 日本数学教育学会第3回春期研究大会, 2015年6月28日, 東京理科大学(東京都新宿区).

岩田耕司, 隠れた学力観とその顕在化による可能性 - 全国学力・学習状況調査(中学校数学)にみる学力観 - . 日本数学教育学会第2回春期研究大会 2014年6月29日, 東京学芸大学(東京都小金井市).

岩田耕司, 中学校数学における課題探究として証明することの授業化 - 第1学年の単元「空間図形」 - , 日本科学教育学会第38回年会, 2014年9月15日, 埼玉大学大久保キャンパス(埼玉県さいたま市).

6 . 研究組織

(1)研究代表者

岩田 耕司 (IWATA, Koji)
福岡教育大学・教育学部・准教授
研究者番号: 9 0 4 3 7 5 4 1