様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 6 月　 9 日現在

機関番号：11101
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：26400002

研究課題名（和文）立方重偶符号と関連する数理構造の研究

研究課題名（英文）Research on triply even codes and their related mathematical structures

研究代表者
別宮　耕一（Betsumiya, Koichi）

弘前大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：60364684

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：1. Wittのデザインとhigmanデザインの結合行列より、それぞれ極大立方重偶符号が得られることを示した。同時に得られた極大立方重偶符号の自己同型群がそれぞれ群M22.2とHigman-Simsの散在型単純群HSと一致することを確認することができた。2. Hammingグラフの隣接行列から極大立方重偶符号の無限系列を構成する方法を見出し、同時にそれらの重み枚挙多項式などの付随物を一般の形で導出することに成功した。3. ある種の有限幾何構造から立方重偶符号の無限系列を構成する方法を見出し、それらが計算機で確認できる範囲において極大であることを確認することができた。

研究成果の概要（英文）：1. We have constructed maximal triply even codes from the Witt design and Higman design respectively. The automorphism groups are the Mathieu group M22.2 and the Higman sims group HS respectively. 2. We have constructed maximal triply even codes from the Hamming graphs and have constructed their weight enumerators generally. 3. We have constructed a infinite series of triply even codes from a kind of finite geometries and have confirmed their maximality in a possible range by computers.

研究分野：数物系科学

キーワード：群論　代数的組合せ論　頂点作用素代数

１．研究開始当初の背景

(1) 頂点作用素代数と立方重偶符号

二元体上の線形符号 C のすべての符号語の Hamming 重みが 8 の倍数であるとき、C を立方重偶符号という。立方重偶符号 C が極大であるとは、C を真に含む立方重偶符号が存在しないことをいう。ある長さの立方重偶符号の分類を与える場合、それぞれの立方重偶符号はある極大な立方重偶符号の部分符号として含まれているため、極大な立方重偶符号のみを考えれば、立方重偶符号全体について考えていると見なすことができる。

(2) 頂点作用素代数と立方重偶符号

1996 年に線形二元符号から頂点作用素代数を構成する方法が開発されたことで、線形二元符号を通した頂点作用素代数の研究が始められた。

そうした流れの中で、後述のムーンシャイン頂点作用素代数が中心電荷 24 の枠付き頂点作用素代数のひとつとして、線形二元符号の一種である長さ 48 の立方重偶符号から構成された。

こうして、長さ 48 の立方重偶符号の分類を通して、ムーンシャイン頂点作用素代数の位置付けの解明が期待されるようになった。

(3) 頂点作用素代数の重要性

頂点作用素代数は数理物理学における 2 次元共形場理論のひとつの公理化として生まれた概念である。そして散在型有限単純群のひとつであるモンスター単純群が、その頂点作用素代数のひとつであるムーンシャイン頂点作用素代数の自己同型写像全体のなす巨大な群として構成されたことで、頂点作用素代数は有限群論における重要な研究課題として注目されるようになった。

この群が重要視されているのは、単に位数が大きいというだけでなく、散在型単純群を解明するための鍵となる群であると見なされていることにある。同時に、保型形式論や共形場理論などの一見何の関連を持つように思われない分野との密接な関係を示唆する興味深い現象が観測されていることも大きい。

(4) 長さ 48 までの立方重偶符号

2012 年に研究代表者らの先行研究によって、長さ 48 までの極大な立方重偶符号の分類が得られている。

長さ 32 までは、素朴な総当たりアルゴリズムによって、長さ 48 については、群を用いた効率のよいアルゴリズムを考案することによって、極大な立方重偶符号の分類を得た。長さが 16 の倍数でない場合は長さが 16 の倍数の立方重偶符号の長さを小さくする操作ですべてが得られることから分類が完了した。

特に、長さ 48 の極大な立方重偶符号は全部で 9 個存在し、そのうち 8 個については、長さが半分の重偶自己双対符号を並べて構成された。残りの 1 個は後述の三角グラフとよばれるものの隣接行列によって生成される符号であることが明らかとなった。

加えて、この長さ 48 の立方重偶符号の分類を得る過程で発見された三角グラフの隣接行列によって生成される符号が他の極大立方重偶符号と比較して多くの異なる性質を有していた。このことは、性質がよく調べられている重偶符号と比較して、立方重偶符号が著しく複雑な状況になっていることを示唆していた。特に、後述のように、極大性の判定が困難な問題であることが明らかとなった。

(5) 極大立方重偶符号の無限系列

4 を法として 2 と合同となる正整数 n について、n 以下の正整数全体からなる集合 Ω_n の 2 元部分集合全体からなる集合を V とする。V を頂点集合とし、1 元のみを共有する頂点の組を隣接していると見なすことによってグラフを定義することができる。このグラフを三角グラフと呼ぶ。このグラフの隣接行列を生成行列とすることによって二元符号が定義される。この二元符号が極大な立方重偶符号の無限系列となることが研究代表者らの先行研究によって解明された。加えて、これらの極大な立方重偶符号の性質として、自己同型群が n 次対称群であることと、一般の形で重み枚挙多項式が明示された。

(6) 立方重偶符号の性質

その後の研究代表者らの研究によって、立方重偶符号の一般的性質の解明が進められた。

重偶符号の場合の重偶性は生成系からの情報からただちに判定可能であるが、立方重偶符号の場合の立方重偶性の判定は重偶性ほど自明ではない。そこで、生成系からの情報から立方重偶であるかどうかを判定する必要十分条件を与えた。

更に、重偶符号の場合の極大性は次元の値から直ちに判定可能である。しかし、立方重偶符号が極大かどうかを判定する場合、長さがある程度小さければ計算機を用いて直接的な方法を用いることで判定することができるが、長さが大きくなれば急速に計算量が増大し、判定が現実的ではなくなってしまう。

そこで、重偶符号に対して代数的な概念である根基と呼ばれる概念を定義した。この概念を用いることで、ある立方重偶符号が極大であるための十分条件は、立方重偶符号とその根基が一致することとなることを示した。しかし、根基の計算は容易でない。そこで、比較的計算が容易かつ根基を包含する二元符号を考案し、極大性の判定に有用であることを示した。これによって、極大性の判定は比較的容易となった。加えて、重偶符号の極大性は自己双対性と同値であるが、それと類似の意味づけを立方重偶符号にも与えるこ

ととなった。
ただし、この判定法は十分条件でしかないため、常に有効とは限らない。加えて、極大性の判定のために二元符号を構成する必要があるが、この導出が困難な場合も多い。そのため、より精密で簡易な判定方法の構築が大きな課題となっている。加えて可能であれば極大であるための必要十分条件

２．研究の目的

前節で述べたような立方重偶符号が持つ興味深い性質が見出される一方、1．極大立方重偶符号に関する次元の規則性、2.重偶な自己双対符号の貼り合せ、もしくは、三角グラフに由来しない極大立方重偶符号の存在非存在、3.三次形式と立方重偶符号との関係性などについては、十分な知見が得られていなかった。
そこで、これらの未解決の問題の解決につながるような知見を獲得することと同時に、これらを解明する過程で頂点作用素代数に関する新たな知見や、未知の組合せ構造に関する知見を獲得することを本研究課題の目的とした。

３．研究の方法

(1) まず、長さ 48 の立方重偶符号の分類の際に得られた極大な立方重偶符号の性質について考察を進め、一般の長さに関する極大な立方重偶符号が持つ性質、構造について考察を行う。同時に立方重偶符号を構成する際に用いた重偶な自己双対符号や三角グラフについての考察を行うことを通して、立方重偶符号に関する一般論の確立を進めていく。
(2) 計算機を用いることで、様々な条件を満たす組合せ構造や群構造に内在する、まだ存在が知られていない立方重偶符号を探索する。
(3) 立方重偶符号の構造に密接に関連する重偶符号やグラフ、組合せデザイン、格子などの構造の探索を進める。同時にそれらの自己同型群の構造を調べる。

４．研究成果

(1)新たな立方重偶符号の構成
前節の(2)で述べた計算機を用いた探索と同時に(3)で述べた既知の組合せ構造に関する研究の結果として、次に掲げるように、関連する組合せ構造を基に新たな立方重偶符号を構成し、それらが持つ組合せ構造、群構造に関する新たな知見を得た。

① 組合せデザインの一種である Witt の 3-(22,6,1)デザインを W_{22} とする。これは S(3,6,22)Steiner システムとも呼ばれる。このデザインのブロック数は 77 であるため、結合行列を M とすると、M は 77×22 行列となる。M の偶数個の行ベクトルの一次結合全体を $E(W_{22})$ とすると $E(W_{22})$ は[77,10,32] 極大立方重偶符号となることが新たな知見として得られた。同時に得られた極大立方重偶符号の自己同型群が Mathieu 群 M_{22} を指数 2 で含む群 $M_{22}.2$ と一致することを確認することができた。

② 組合せデザインの一種である Higman デザインと呼ばれる 2-(176,50,14)デザインを H とする。H の結合行列を N とし、N の偶数個の行ベクトルの一次結合全体を $E(H)$ と表記することとすると、$E(H)$ は[176,21,56]極大立方重偶符号となることが新たな知見としてか得られた。同時に得られた極大立方重偶符号 $E(H)$ の自己同型群 Aut($E(H)$)が Higman-Sims の散在型有限単純群 HS と一致することを確認することができた。

③ n 次の置換群 G が与えられたとき、G の位数 2 の元全体がなす集合を $I(G)$ と表記する。$I(G)$ の元 g の作用によって固定される集合の特性ベクトルによって張られる二元符号の双対は千吉良−原田−北詰符号と呼ばれる。ここで HS を Higman-Sims 散在型単純群とすると、HS は 176 次の置換表現を持つ。この 176 次の置換群を G として得られる千吉良−原田−北詰符号 C は [176,22,50] 自己直交符号となることが知られている。この C の重偶元全体がなす部分符号は[176,21,56] 自己直交重偶符号となるが、この部分符号が前述の極大立方重偶符号 $E(H)$ と一致することを確認した。

④ 研究開始当初の背景(5)にある三角グラフを基に構成される極大な立方重偶符号の無限系列について千吉良−原田−北詰符号との関連に関する考察を行った。まず、n が 4 を法として 2 と合同な正整数とし、n 次対称群を n 以下の正整数からなる 2 元集合全体からなる集合の置換群と見なすことで、千吉良−原田−北詰符号が定義できる。この符号は次元 n-1 で立方重偶符号とはならないが、前述の次元 n-2 三角グラフを基に構成される極大な立方重偶符号を含むことが明らかとなった。

⑤ 正整数 n について、n 以下の正整数の２つ組全体の集合を頂点集合とし、Hamming 距離が１であることをもって隣接していると定義することで、グラフが得られる。このグラフを $H(2,n)$ と表記する。このグラフの隣接行列の偶数個の行ベクトルの一次結合全体は $2n$-3 次元の二元符号となる。n が 4 の倍数のとき、この二元符号が極大な立方重偶符号となることを明らかにした。これらは自己双対重偶符号の貼り合わせでできる極大な立方重偶符号とも三角グラフから構成される極大な立方重偶符号とも異なり、新たな無限系列をなしている。

⑥ Hamming グラフを基に構成される極大な立方重偶符号の無限系列について千吉良−原田−北詰符号との関連に関する考察を行った。n 次対称群と位数２の巡回群とのリース積を Hamming グラフの頂点に自然に作用させることで得られる置換群に関する千吉良−原田−北詰符号は $2n$-2 次元の二元符号となる。この符号が Hamming グラフを基に構成される極大な立方重偶符号を含むことを明らかにした。同時に両者の重み枚挙多項式を決定した。

⑦ ある種の有限幾何構造から立方重偶符号の無限系列を構成する方法を見出し、それらが計算機で確認できる範囲において極大であることを確認することができた。そのほか多くの有限幾何構造を基に、計算機による数値実験を通して、極大立方重偶符号を構成することに成功し、それらのいくつかは無限系列となる可能性があることを確認することができた。

⑧ 興味深い現象として、ここまでで得られた極大な立方重偶符号に関する自己同型群の構造の中に、散在型有限単純群である Higman-Sims 群、Mathieu 群の他、ある種の Lie 型の単純群が含まれていることを確認できた。つまり、新たに構成された極大な立方重偶符号の自己同型群が位数の比較的大きな有限単純群と一致するか、もしくは、その正規部分群として含まれることを確認した。逆にそれらの単純群を構成する際に標準的に用いられる組み合わせ構造から得られる隣接行列や結合行列を基に、もとの極大な立方重偶符号が構成できることも確認することができた。

以上の結果により、「２．研究の目的」で掲げた目的２の解答が得られた。

すなわち、ここまでで列挙した通り、重偶な自己双対符号の貼り合わせでもなければ、三角グラフの隣接行列を生成行列とする符号でもない極大な立方重偶符号が多様な方法で新たに構成された。これは極大な立方重偶符号の多様性と複雑さを示唆しているものと捉えており、研究目的として掲げた次元の規則性の定式化などの一般論の確立が困難な問題であることが明らかになった。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Koichi Betsumiya "Triply even codes constructed from distance regular graphs", 京都大学数理解析 研究所講究録, 査読無, No.2003, 2016, 66-73

② 別宮耕一 "重偶立方符号の自己同型群に現れる単純群",第 27 回有限群論草津セミナー報告集, 査読無, 2015, 29-32

③ 別宮耕一 "組合せ構造における純粋ナッシュ均衡性",第 26 回有限群論草津セミナー報告集, 査読無, 2014, 6-8

〔学会発表〕（計７件）

① 別宮耕一, "Maximal triply even codes constructed from finite geometries", 研究集会「実験計 画法と符号および関連する組合せ構造」, 2016 年 11 月 28 日～30 日, 秋保リゾートホテルクレセント（仙台市）

② 別宮耕一, "Triply even codes related to simple groups", Workshop on Finite Groups, VOA, and algebraic combinatorics、2016 年 3 月 21 日～25 日、Foguang University, Jiao Xi, Yilan, Taiwan.

③ 別宮耕一, "Triply even codes constructed from distance regular graphs", 代数的組合せ論とその周辺、2016 年 3 月 8 日～9 日, 東北大学大学院情報科学研究科（仙台市）

④ 別宮耕一, "Triply even codes constructed from distance regular graphs", RIMS 研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」, 2016 年 1 月 5 日～8 日, 京都大学数理解析研究所（京都市）

⑤ 別宮耕一, "重偶立方符号の自己同型群に現れる単純群", 第 27 回有限群論草津セミナー, 2015 年 8 月 2 日～8 月 5 日, 国立大学共同利用草津セミナーハウス（群馬県草津町）

⑥ 別宮耕一, "Maximal triply even codes constructed by combinatorial designs", Workshop on Hadamard Matrices and Combinatorial Designs, 2014 年 10 月 31 日、東北大学大学院情報科学研究科（仙台市）

⑦ 別宮耕一, "組合せ構造における純粋ナッシュ均衡性", 第 26 回有限群論草津セミナー, 2014 年 8 月 1 日～4 日, 国立大学共同利用草津セミナーハウス（群馬県草津町）

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕

ホームページ等

DATABASE: Triply Even Codes of Length 48

http://www.st.hirosaki-u.ac.jp/~betsumi/triply-even/

6．研究組織

(1)研究代表者

別宮 耕一（BETSUMIYA, Koichi）

弘前大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：60364684