様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１１５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００４

研究課題名（和文）対称錐の基本領域における境界成分の計算と応用

研究課題名（英文）Computation of boundary components of fundamental domains of symmetric cones and its application

研究代表者
早田　孝博（Hayata, Takahiro）

山形大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：５０３１２７５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：この研究では、古典群の元のキス数を求めるアルゴリズムを提案し、応用を図った。これはジーゲルによる正定値対称行列のミンコウスキー領域における評価式と、ショートベクトルアルゴリズムを利用している。線形変換の高さは、等方空間の部分格子の像の余体積と格子の余体積の次元調節付きの比で定義される。格子のモジュラー変換の最小の高さを密度という。密度を与えるモジュラー変換の同型類の数をキス数という。これは格子配置の球充填問題の一般化である。応用として、4次シンプレクティック群の、全等方部分空間に関する高さに関するキス数の計算を行い、局所最大キス数を持つ格子を3種類発見した。

研究成果の概要（英文）：In this research, we propose an algorithm computing the kissing number of an element of classical groups and apply them to concrete cases. This algorithm uses the evaluation of determinants of the positive definite symmetric matrices in the Minkowski domain and so-called the short vector algorithm. The height of the linear transformation is by definition the modified ratio of the covolume of the transformed sublattice in the isotropic space and the covolume of the whole fixed lattice. The density is the minimum value of the height among modular transformation of the lattice and the kissing number is its cardinality modulo certain modular transformations. These are a generalization of the classical sphere packing problem. An application is when the symplectic group of degree 2, matrix size 4 and when the totally isotropic space is chosen. In this case, there are three kinds of symplectic lattices who have locally maximal kissing numbers.

研究分野：数論

キーワード：エルミート定数　基本領域　ジーゲル上半空間　最小ベクトル　キス数

１．研究開始当初の背景

古典的な問題である n 次元ユークリッド空間上の球充填問題は、一定の半径の超球をできるだけ密に配置する最適化問題である。特に格子配置、すなわち超球の中心がユークリッド空間の格子に配置されるように問題を限定すると、ボロノイ理論と称される代数的なアプローチが可能になる。格子配置の最大密度をエルミート定数という。ボロノイ理論では、格子の最短ベクトル集合を定義し、それからパーフェクト格子の概念を導入する。パーフェクト格子は上記最適化問題の解である最密格子の候補となる格子である。そしてさらにパーフェクト格子はリシュコフ多角形と呼ばれる局所有限多角形の頂点集合でもある。そのモジュラー同値類の有限性からパーフェクト格子をすべて求める２分探索法を元にしたボロノイアルゴリズムが提案された。ボロノイアルゴリズムによって $1 \leqq n \leqq 8$ の格子配置球充填問題のパーフェクト格子が知られている［⑦ (2007) Schürmann 他］。エルミート定数に限定するならば、$n \leqq 8$［② (1934) Blichfeldt］, $n = 24$［⑤ (2009) Cohn and Kumar］がある。なお、近年格子配置に限らない場合の最大密度が $n = 3$［⑩ (2005) Hales］のときに示されており, $n = 8, 24$［④ (2016) Cohn］のときも格子配置のものと同じであることもアナウンスされた。格子配置の球充填問題は様々な観点から一般化されている。

ランキン拡張　密度を測る「高さ」関数として n 以下のパラメータに依存する非ユークリッド的な高さ関数を導入することでランキン拡張型の最適化問題が得られる。最適化値をランキン定数という。これは一般化されたエルミート定数である。$n = 4$ の場合に［⑬ (1953) Rankin］によって得られた。パーフェクト格子については［⑥ (1996) Coulangeon］の研究がある。$n \geqq 5$ では、いくつかの場合に、［⑭ (2011) 沢谷-渡部-奥田］によってランキン定数が得られている。

対称錐拡張　一方、［① (1975) Ash 他］によって、一般の対称錐における高さやリシュコフ多角形が定義された。対称錐として、正定値対称行列全体の成す錐を選ぶと、ボロノイケースになる。高さから密度関数を定義することによる最適化問題の解として一般化されたエルミート定数が定義される。

代数群拡張　［⑮ (2003) 渡部］に一般の代数群の (一般化された) エルミート定数が定義された。また［⑯ (2014) 渡部］によって代数群のリシュコフ領域が定義された。ここでは、高さは有理極大放物型部分群の指標で定義される。代数群として一般線形群を選び、高さとして、階数１の極大放物型部分群の指標を選ぶと、ボロノイケースに帰着する。また、さらに高さとして、一般の極大放物型部分群の高さを選ぶと、ランキン拡張になる。さらに、階数１の実直交群やユニタリ群、例外群など対称錐の自己同型群を代数群として選ぶと、Ash の拡張に帰着する。この、非常に一般的な枠組への拡張により、対称錐を虚部に持つチューブ領域、さらにはエルミート型半単純リー群の対称領域における高さ、密度、リシュコフ領域、頂点、完全性、最小ベクトル集合、キス数などといったボロノイ理論における概念が自然に導入され得る状況が整った。

２．研究の目的

エルミート型半単純リー群の対称領域において、ボロノイ理論の類似を展開する。特に、最小ベクトル集合やキス数の計算に重点をおき、計算アルゴリズムを開発する。ジーゲル基本領域の場合にアルゴリズムを適用して局所最大なキス数をもつシンプレクティック格子を探索する。

３．研究の方法

エルミート型半単純リー群の対称領域において、ボロノイ理論の類似を展開することを目的として、計算代数的アプローチを試みる。ボロノイケースに適用できる一般線形群上のいろいろな計算をアルゴリズム化し、低ランクのケーススタディを行う。グラム行列全体で適用可能なアルゴリズムを、対称領域へ制限することを考える。特にジーゲル上半空間の場合やローレンツ錐の場合へ適用する。

最小ベクトル集合により、基本領域あるいは、リシュコフ領域の境界成分は特徴づけられていると考えられる。これは実際にボロノイケースにおいては、［⑫ (1873) Korkine-Zolotareff］,［⑨ (1988) Grenier］の基本領域がそうなっている。階数２のジーゲル上半空間の場合は、ジーゲル基本領域は［⑧ (1959) Gottschling］により、基本領域の境界を構成する余素対称対がすべて求められている。

これらの場合を含め、一般に、リシュコフ領域において、適切に定式化をすることにより、最小ベクトルの有限集合のなすイデアルを考え、その零集合として対称領域の点あるいは境界成分はとらえられるはずである。最

小ベクトルの有限集合の包含関係のなす隣接関係で近似的な木モデルができるが、特に零次元イデアルになっているものについては、これはボロノイ理論やそのランキン拡張におけるパーフェクト格子にあたるものだと考えられる。零次元イデアルについては、グレブナ基底を利用した計算方法が発達している。零集合を計算することにより、最小ベクトル集合になるイデアルを判定することができる。またその局所的な性質の証明も可能になる。この枠組は、［⑪ (2012) 早田 他］により、虚部が正定値対称行列全体のなす対称錐であるチューブ型領域であるジーゲル上半空間には実行可能である。階数 2 の場合、グレブナー基底による計算およびキス数計算を、階数 2 のジーゲル上半空間をパラメーター空間に持つシンプレクティック格子について適用する。

４．研究成果

(1)　キス数の定式化。

一般線形群の部分群としての古典群の元のキス数を次のように定義する。古典群を定める形式に関する等方部分空間を固定する。古典群の元による、等方空間の部分格子の線形変換像の (等方部分空間に対する) 余体積と全体の格子の余体積の次元調節付きの比で高さ関数を定義する。部分格子のモジュラー変換全体を考え、その最小の高さを密度という。密度を与えるモジュラー変換の同型類の数をキス数という。これらの用語は、古典群として一般線形群を考え、また等方部分群として一次元部分空間を選んだ場合、格子配置の球充填問題に帰着することから、援用したものである。
次にグラム行列を考えることにより、一般線形群の対称領域、つまり正定値対称行列全体への埋め込みができる。高さはグラム行列上、主小行列での計算に帰着される。

(2)　キス数の計算アルゴリズムの提案。

グラム行列がミンコウスキー領域あるいはグレニエ領域にあると、対角成分の積と行列式の間にジーゲルによる不等式が成立する。このことから正定値対称行列の最小モジュラー変換の列ベクトルは、ある有限球の内部にあることがわかり、有限性が証明できる。有限球の内部の格子ベクトルは、有限個であり、ショートベクトルアルゴリズムで計算される (［③ Cohen］)。よって最小モジュラー変換を成すモジュラー行列はこの有限個の列ベクトルの組合せで得られ、あとは古典群のモジュラー群の判定を行うことにより、最小モジュラー変換の集合が得られる。その同型類の判定もショートベクトルアルゴリズムをうまく利用することにより、判定アルゴリズムが構成できる。特にその同型類の位数を求めることにより、キス数が計算されることを示した。

(3)　階数 2 のジーゲル基本領域への応用 — ［⑧ (1959) Gottschling］ の結果の拡張。

ジーゲル上半空間において、ジーゲルモジュラー群の作用による基本領域を考える。これはジーゲルによる構成法が知られており、ジーゲル基本領域と呼ばれている。階数が 2 のときには［⑧ (1959) Gottschling］により、ジーゲル基本領域の境界を構成する超平面が 28 個の等式で与えられることが示された。Reshkov 領域は単位モジュラー変換が最小モジュラー変換集合に入るという条件で特徴付けされる。階数が 2 のジーゲル基本領域は Reshkov 領域の基本領域でもあり、Gottschling のリストのうち、19 個は Reshkov 領域の境界でもある。報告者は、Reshkov 領域の境界としてジーゲル基本領域に交わるものがさらに 6 個あることを、Gottschling の証明を拡張することにより、得た。

(4)　階数 2 のジーゲル基本領域への応用 — キス数の計算。

古典群としてシンプレクティック群を選ぶ。等方空間として斜交形式の全等方空間を選ぶ。シンプレクティック格子はパラメーター空間として、ジーゲル上半空間を持つ。シンプレクティック格子の高さに関する最小モジュラー変換は、ジーゲル上半空間の高さに一致し、Reshkov 領域のパラメーター空間は、ジーゲル上半空間の Reshkov 領域になる。よってジーゲル基本領域の境界上の要素のキス数を求めれば十分である。特に、パーフェクト格子に対応するる零次元イデアルを成す場合を考える。その零集合の要素であって基本領域の境界上の点でもあるものを 0 セルという［⑪ (2012) 早田、他］。上記、ジーゲル不等式およびショートベクトルアルゴリズムを利用したキス数を求めるアルゴリズムを使って 0 セルのキス数を計算した。特に、局所最大なキス数をもつ 0 セルは以下の 3 とおりのものが発見された：

A_2 型ルート格子の 2 つの直積： キス数 9
D_4 型ルート格子： キス数 8
非ルート格子： キス数 7

なお、一般化されたエルミート定数を達成する格子は D_4 型ルート格子である。
重要な知見として、キス数の最大数を達成する格子は必ずしもエルミート定数を達成していない。これは［⑰ (1971) Watson による予想］にあるようなボロノイケースとは異なる現象であり、より深く研究されるべき事柄である。

＜引用文献＞

① Avner Ash, David Mumford, Michael Rapoport, and Yung-Sheng Tai. *Smooth compactifications of locally symmetric varieties.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2010. With the collaboration of Peter Scholze.

② H.F. Blichfeldt. The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables. *Math. Z.*, 39:1–15, 1934.

③ Henri Cohen. *A course in computational algebraic number theory*, volume 138 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

④ Henry Cohn. A conceptual breakthrough in sphere packing. *Notices Am. Math. Soc.*, 64(2):102–115, 2017.

⑤ Henry Cohn and Abhinav Kumar. Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices. *Ann. Math. (2)*, 170(3):1003–1050, 2009.

⑥ Renaud Coulangeon. Réseaux k-extrêmes. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 73(3):555–574, 1996.

⑦ Mathieu Dutour Sikirić, Achill Schürmann, and Frank Vallentin. Classification of eight-dimensional perfect forms. *Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc.*, 13:21–32, 2007.

⑧ Erhard Gottschling. Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereiches der Modulgruppe zweiten Grades. *Math. Ann.*, 138:103–124, 1959.

⑨ Douglas Grenier. Fundamental domains for the general linear group. *Pacific J. Math.*, 132(2):293–317, 1988.

⑩ Thomas C. Hales. A proof of the Kepler conjecture. *Ann. Math. (2)*, 162(3):1065–1185, 2005.

⑪ Takahiro Hayata, Takayuki Oda, and Tomoki Yatougo. Zero cells of the Siegel-Gottschling fundamental domain of degree 2. *Exp. Math.*, 21(3):266–279, 2012.

⑫ A. Korkine and G. Zolotareff. Sur les formes quadratiques. *Math. Ann.*, 6(3):366–389, 1873.

⑬ R. A. Rankin. On positive definite quadratic forms. *J. London Math. Soc.*, 28:309–314, 1953.

⑭ Kazuomi Sawatani, Takao Watanabe, and Kenji Okuda. A note on the Hermite-Rankin constant. *J. Théor. Nombres Bordx.*, 22(1):209–217, 2010.

⑮ Takao Watanabe. Fundamental Hermite constants of linear algebraic groups. *J. Math. Soc. Japan*, 55(4):1061–1080, 2003.

⑯ Takao Watanabe. Ryshkov domains of reductive algebraic groups. *Pacific J. Math.*, 270(1):237–255, 2014.

⑰ G. L. Watson. The number of minimum points of a positive quadratic form. *Dissertationes Math. Rozprawy Mat.*, 84:42, 1971.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　０件）

〔学会発表〕（計　５件）

① 発表者: 早田 孝博
発表表題: “Cohomological unitary representations and VZ-vectors”
学会等名: “Workshop 2017 — Hodge conjecture on Unitary Shimura varieties and $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$”
発表年月日: 2017 年 3 月 13 日
発表場所: 岡山大学理学部 2 号館合同演習室

② 発表者: 早田 孝博
発表表題: “Short vector algorithm and the kissing number on the Siegel-Gottschling fundamental domain of degree 2.”
学会等名: ミニワークショップ Modular forms and period integrals
発表年月日: 2016 年 9 月 13 日
発表場所: 東京大学駒場キャンパス

③ 発表者: 早田 孝博
発表表題: Computing Kissing Numbers on Classical Groups
学会等名: 金沢数論ミニ集会２０１６
発表年月日: 2016 年 12 月 8 日
発表場所: 金沢大学サテライトプラザ２階講義室

④ 発表者: 早田 孝博
発表表題: “0 cells of the Siegel-Gottschling fundamental domain of degree 2”
学会等名: MCM2015Autumn
発表年月日: 2015 年 10 月 29 日
発表場所: 東京大学駒場キャンパス

⑤ 発表者: 早田 孝博
発表表題: A short talk inside “Cells of the Gottschling-Siegel fundamental domain of Siegel modular group of genus two by Takayuki ODA”
学会等名: Workshop on Computational Number Theory with Implementations 2015
発表年月日: 2015 年 2 月 21 日
発表場所: 九州大学伊都キャンパス

〔図書〕（計　0 件）

６．研究組織

(1) 研究代表者

早田　孝博 (HAYATA, Takahiro)
山形大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号: 50312757

(4) 研究協力者

織田　孝幸（ODA, Takayuki）
沖縄科学技術大学院大学・教授
研究者番号：10109415

渡部　隆夫（WATANABE, Takao)
大阪大学・理学研究科・教授
研究者番号：30201198