様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：１３２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００８

研究課題名（和文）モジュラ形式の計算から見る数論

研究課題名（英文）Number theory from a viewpoint of computation of modular forms

研究代表者
木村　巌（Kimura, Iwao）

富山大学・大学院理工学研究部（理学）・准教授

研究者番号：１０３１３５８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：今回の研究課題では，楕円モジュラー形式にまつわる数論のいくつかの問題を，実際にコンピュータを使って計算して解明することを主眼にした．3年間のうち1年目は主に，重さ1のヘッケ固有形式に付随する，有理数体の絶対ガロア群の2次元の複素アルティン表現の計算に取り組んだ．特に像が非可解群になる場合が興味深い．導手が平方因子を持たない場合は，計算量の評価を与えることができた．2年目は主に，Maass波動形式の数値計算に取り組み，数値的な不安定さから採用した計算手法に困難があることを観察した．3年目はフリッケ群上のモジュラー形式の零点を考察し，既知の結果の拡張が得られた．

研究成果の概要（英文）：The point of this research is to study some problems on number theory which are related to elliptic modular forms via explicit numerical/symbolic computation using computers. On the first year of this three years project, I mainly concerned on the computation of 2 dimensional complex Artin representation of the Galois group of the rationals associated with the Hecke eigen cuspform of weight 1. It is of special interest if those image are non-solvable. If the conductor of this representation are square free, the explicit bound of order of computations. In the second year, I mainly studied a numerical method to compute Maass waveforms. I found a numerical instability of the method I took makes things complicated. In the last year, I considered zeros of modular forms on Fricke groups and obtained some extension of results which are known by prior study.

研究分野：数論

キーワード：モジュラー形式　コンピューター

１．研究開始当初の背景

楕円モジュラー形式，特にヘッケ固有新形式と，そのレベルを割らない素数 l に対して，有理数体の絶対ガロア群から，標数 l の有限体上の 2 次元正則行列全体の群への連続準同型写像（2 次元ガロア表現）が存在し，さらにこの準同型写像によるフロベニウス準同型のトレースがもとのヘッケ固有新形式のフーリエ展開係数と一致する，といったことが 70 年代から知られていた（P. Deligne）．

楕円モジュラー形式は，複素上半平面上で定義された正則関数で，モジュラー群とよばれる離散群（2 行 2 列の整数行列で，行列式が 1 であるもの全体のなす群，もしくはその部分群で，成分に関する合同式によって定義される部分群）に対して一定の変換公式を満たすものである．合同式に現れる整数をモジュラー形式のレベル，変換公式に現れる定数（非負整数）を重さといい，レベルと重さを指定すれば，モジュラー形式の全体は複素数体上有限次元のベクトル空間になり，例えば次元なども重さとレベルとによってあらわすことができる．モジュラー形式そのものは，すでに 19 世紀末からその重要性が認識されていた．20 世紀の中ごろから，数論における重要性が徐々に認識され，特に上述の Deligne の結果などから，数論や数論幾何における決定的な役割を果たすことが明らかになった．

楕円モジュラー形式は，その高い対称性から，ただ正則関数であるのみならず，ある意味で，代数体上定義された存在である（フーリエ展開係数が代数的数であるような楕円モジュラー形式からなる基底を取ることができる）．また，やはり高い対称性を持つことから，強い有限性を持つ．例えば，楕円モジュラー形式は，その最初のいくつかのフーリエ展開係数によってきまってしまう（何個のフーリエ展開係数が必要かは，やはりレベルと重さによって明示できる）．特に，計算機による明示的で正確な（丸目誤差などを伴わない）計算が可能な対象である．

ここ 10 年ほどの間に，楕円モジュラー形式に伴うガロア表現を計算する具体的な手続きが与えられ，計算量の評価などの理論的な考察のみならず，実際にプログラミング言語で実装されるなどの発展があった（B. Edixhoven, J.-M. Couveigne, P. Bruin, N. Mascot ら）．本研究の代表者は，この発展を受けて，モジュラー形式に伴うガロア表現の計算を手段の一つとして，また関連するモジュラー形式に伴う数論的な対象を計算する手法も用いて，数論のいくつかの問題に取り組むことを企図した．

２．研究の目的

上述のように，本研究課題の代表者は，Edixhoven, Couveigne らのアルゴリズム（モジュラー形式に伴う 2 次元法 l ガロア表現の計算，ここで l は考えているモジュラー形式のレベルを割り切らない素数）の開発をきっかけに，それを手段として，数論のいくつかの問題の研究を企図した．

特に，ガロア表現の像が非可解の場合は，従来の手法，すなわち，非可解群をガロア群に持つ特別な代数体の族（いわゆるガロアの逆問題からのアプローチ）や，多数の候補となる体を生成したうえで，個別に所期の体を探索する手法とは異なり，代数体の特性をモジュラー形式から調べること，例えば素数の分解法則をモジュラー形式のフーリエ展開係数を用いて記述することなども可能になるのではないかと考えた．更に広く，モジュラー形式とそれに伴う数論の問題に，計算機を用いた具体的な手法で取り組むことを目的とした．

3 年間にわたる研究期間中，当初の研究計画とやや異なる経緯をたどった．研究期間中に取り上げた問題は大別して，次の 3 つであった．（１）重さ 1 のモジュラー形式（ヘッケ固有形式）に伴う 2 次元複素アルティン表現の計算，（２）マース波動形式の数値計算，（３）フリッケ群上のモジュラー形式の零点の位置に関するものである．

３．研究の方法

以下，「2．研究の目的」の末尾で述べた 3 つの研究テーマについて，その研究方法と関連する事項を述べる．

まず（１）については，重さ１のモジュラー形式（ヘッケ固有形式）に 2 次元複素アルティン表現が伴うことは，70 年代に J.-P. Serre，P. Deligne らによって証明された．彼らの証明をほぼその通りにたどると，重さ 1 のモジュラー形式を入力とし，それに伴う 2 次元複素アルティン表現，すなわち，（この表現の像が有限であることが容易にわかるので）表現の核にガロア理論によって対応する有限次ガロア拡大体を出力するアルゴリズムを構成することが予見できる．本研究では，これが実際にアルゴリズムになっていること，つまり（モジュラー形式は前述のように，最初の有限個のフーリエ展開係数で決まるので入力が有限であることは保証されているが），出力が有限の情報で記述されていること（これも出力が有理数体上の有限次ガロア拡大であることから，その定義多項式が有理数体上の有限次多項式であることから容易にわかる），最も非自明なのは，計算過程が有限で，必要なメモリも有限であることである．しかし，Deligne-Serre の証明の途中で，重さが 2 以上のヘッケ固有形式に伴う法 l 表現を計算する箇所がある．これが，前述の，Edixhoven-Couveigne-Bruin-Mascot らのアルゴリズムにより保証される．また，重さ 2 以上のヘッケ固有形式に伴う 2 次元法 l ガロア表現の計算過程への入力として，元の重さ 1 のモジュラー形式にある仕方で伴う，重さ 2 以上のモジュラー形式を構成する必要がある．このステップは，元論文ではモジュラー形式の合同に関する理論を用いるが，それとはやや異なる，重さ１のアイゼンシュタ

イン級数との積として構成する方法を採用した（M. Koike, Nagoya Math J. 1976）．これによって得られるモジュラー形式は重さが2で，しかもフーリエ展開係数が明示的に得られるという利点がある．重さが2であることは，それにガロア表現がヤコビ多様体の等分点に実現されるという点も，計算が明示的になるという利点がある．

（2）マース波動形式は，モジュラー形式が複素上半平面の上で定義された正則関数（もしくは有理形関数）であるのに対して，複素上半平面を2次元の実多様体とみなした時のラプラシアンの固有関数であり，モジュラー群についての（モジュラー形式と同じ）変換公式を満たすものである．モジュラー形式と同様に，レベルと重さと呼ばれる量が定まり，それを指定するとマース波動形式の空間も有限次元であることが知られているが，次元公式は知られていない．また，マース波動形式は，モジュラー形式のフーリエ展開よりもより複雑なKベッセル関数を含む展開を持つが，マース波動形式を具体的に展開表示で与えることは，アイゼンシュタイン級数と呼ばれる特別のクラスのもの以外は難しい．今回の研究では，マース波動形式のうちヘッケ固有形式になっているものを，K ベッセル関数を含む級数表示として計算することを目的とした．動機は，「1．研究開始当初の背景」で述べた，正則モジュラー形式に伴う2次元法lガロア表現と同様に，マース波動形式でヘッケ固有カスプ形式となっているものには，「偶」なガロア表現が伴うことが予想されているからである．

マース波動形式のうちヘッケ固有形式になっているものの計算のアルゴリズムとして，H. Stark（1984）により提案された，固有形式であることを条件とする反復法によるものを用いた．本研究の代表者は，このアルゴリズムをPari-gpという数論の計算に特化したプログラミング言語により実装し，数値計算を行った．しかし，反復法に特有の初期値鋭敏性と思われる現象により，初期値や計算過程での丸目誤差（あるいは，多倍長で計算していることによる丸目の無さ）からくると推測される計算結果の不安定性を観察することとなった．結果的に，Stark ら先行する数値計算を再現することも難しいということを結論とした．

（3）レベルの低いフリッケ群上のモジュラー形式の零点の位置の考察を行った．きっかけは，（1）と関連して，重さ 1 のモジュラー形式を具体的に（フーリエ展開として）与えることにあった．素朴なアイディアとして，重さが1だけ異なる2つのモジュラー形式の商を取る，というものがある．（レベルが同じで重さがことなるモジュラー形式の積は，もとのモジュラー形式の重さの和になり，商は重さが分子のモジュラー形式の重さから分母のモジュラー形式の重さを引いたものになる）．しかし，このモジュラー形式の商は，分母にあるモジュラー形式の零点に由来する極を持つことがある．正則であることを示すためには，分子と分母の零点の位置と位数を特定し，零点が相殺していることを示せばよい．

このような文脈とは独立して，特にレベルが低いモジュラー形式の零点の位置と位数についての先行研究があった．例えばレベル 1 のモジュラー群に関するアイゼンシュタイン級数の（標準的な基本領域内の）零点の位置については，F. K. C. Rankin and P. Swinnerton-Dyer（1970）の決定的な先行研究があり，標準的な基本領域内のアイゼンシュタイン級数の零点は，単位円周上にあることとが示され，位数も与えられている．この研究は2つの方向に展開された．一つは，レベル1のモジュラー群に関するアイゼンシュタイン級数に，微小な摂動項を加えたモジュラー形式の零点の位置に関する研究（J. Getz, 2004）である．もう一つは，群を別の群，例えばフリッケ群（特にレベルが2または3の場合）に取り換え，その群上のアイゼンシュタイン級数の零点の位置を特定する研究である（Miezaki, Nozaki, Shigezumi, 2007）．後者では，Rankin, Swinnerton-Dyer の手法がきれいに拡張され，同様の結果が得られている．今回，本研究の代表者は，これらの二つの流れを統合し，レベルが2または3のフリッケ群上のアイゼンシュタイン級数に，微小な摂動項を付け加えたようなモジュラー形式の零点の位置を特定することを試みた．その際には，フリッケ群上のモジュラー形式（アイゼンシュタイン級数やカスプ形式）を具体的に構成し，それがレベル1のモジュラー群上のモジュラー形式から一定の操作で得られていることの確認，あるいは，フリッケ群上のモジュラー形式の値の数値計算からグラフを作成，零点の位置や位数の特定に役立てることなどで計算機を用いた．

4．研究成果

（1）の重さ1のモジュラー形式に伴う2次元複素アルティン表現の計算については，アルティン表現の像の大きさが事前にわかっている場合にはアルゴリズムを構成することができた．これは，計算の過程で，重さ 2 以上の法lガロア表現を計算するが，このlが像の大きさを越えることが必要だからである．しかし，一般には像の大きさを事前に知ることは難しい．重さ1のモジュラー形式のレベルが平方数で割り切れず，アルティン表現の像の射影化が5次交代群と同型になる場合には，像の大きさをおさえることができるという先行研究がある（H. Nakazato, 1980）．これによれば，像の射影化が 5 次交代群と同型であるという仮定の下で具体的なアルゴリズムを構成できる．この研究成果については，中間報告として Algorithmic Number Theory Symposium（ANTS 2014, 韓国慶州）でポスター発表を行った．その際，当

時フランスのボルドー第一大学在籍中だったN. Mascot氏と研究討論を行い，情報を交換した．現在論文を準備中であるが，上記のような仮定が必要なことから，追加の考察も並行して行っている．

（２）マース波動形式の数値計算については，研究方法欄に記述したように数値的な不安定性を経験し，先行研究の数値結果を再現することも困難であることを観察した．計算の手法，プログラム並びに計算過程を京都大学数理解析研究所で開催された研究集会にて報告し，同講究録にて出版した．マース波動形式の数値計算には，セルバーグの跡公式を用いた別の手法もあり，そちらを採用した数値計算を行うことを今後の課題としたい．

（３）レベルが2もしくは3のフリッケ群上のモジュラー形式で，アイゼンシュタイン級数に微小な摂動項を加えて得られるものの零点の位置と位数に関する研究については，モジュラー形式のレベルが2もしくは3であることに応じて,それぞれ重さが8m+10の形,もしくは 12 で割り切れる場合に一定の結果が得られた．これらは，富山大学大学院理工学教育部修士課程数学専攻に在学していた引地崇氏，村松有摩氏との共同研究である．研究成果についてはいくつかの国内での研究集会で報告し，現在論文を準備中である．また，重さに関する制限を緩和すること，アイゼンシュタイン級数に摂動項を加えたものではなく，例えばフリッケ群上のカスプ形式の零点の位置を特定することなど，今後の展開を見越して研究を継続している．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計１０件）

モジュラー形式の零点について
木村　巌
2017早稲田整数論研究集会　2017年3月21日　小松 啓一 （早稲田大学)，橋本 喜一朗（早稲田大学)，尾崎 学（早稲田大学)，坂田 裕 （早稲田大学高等学院）

いくつかのモジュラー形式の零点について
木村　巌
Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics　2017年2月12日　人 木村巌（富山大)、古閑義之（福井大)、小木曽岳義（城西大)、山根宏之（富山大）

レベルの低い Fricke 群上のモジュラー形式について
木村　巌
香川セミナー　2016年11月26日

Maass waveformの数値計算
木村　巌
計算代数システムによる新しい数学の開拓と進展　2015年9月30日　横山俊一（九州大/JST CREST）

Maass波動形式の数値計算
木村　巌
2015大分整数論研究集会　2015年9月1日　寺井伸浩(大分大学)　福田隆(日本大学)

重さ１のモジュラー形式に伴う2次元アルティン表現の計算
木村　巌
Workshop on Computational Number Theory with Implementations 2015　2015年2月22日

重さ1のモジュラー形式とそれに伴うGalois表現の計算
木村　巌
早稲田大学整数論セミナー　2014年11月21日

重さ１のモジュラー形式に伴う Galois 表現の計算
木村　巌
神楽坂代数セミナー　2014年7月24日

重さ１のモジュラー形式に伴う Galois 表現とそのL関数の特殊値の計算
木村　巌
神戸大学代数セミナー　2014年7月17日

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　木村　巌（KIMURA，Iwao）
　富山大学・大学院理工学研究部・准教授
　研究者番号：10313587

(2)研究分担者
　　　　　　　(　　　)

　研究者番号：

(3)連携研究者
　　　　　　　(　　　)

　研究者番号：

(4)研究協力者
　　　　　　　(　　　)