様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月　 ７ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４０００１０

研究課題名（和文）簡約代数群とその被覆群のエンドスコピーとラングランズ対応の研究

研究課題名（英文）On endoscopies and Langlands correspondences for reductive groups and its covering groups.

研究代表者
平賀　郁（Hiraga, Kaoru）

京都大学・理学研究科・講師

研究者番号：１０２６０６０５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：現在の整数論の中心的な問題の一つがラングランズ対応やラングランズ関手性である。そのラングランズ関手性のなかでも特別なものがエンドスコピーと呼ばれるもので、古典群と関係したものに対しては研究が大きく進展している。一方で簡約代数群の被覆群も整数論に現れてくる対象なのであるが、これのエンドスコピーについては、まだよくわかっていない。
本研究においては、ある小さい簡約代数群の被覆群の場合にエンドスコピー的移送に関係する基礎的な結果を得た。また、別のある小さい簡約代数群の被覆群の跡公式に関する基礎的な結果も得た。

研究成果の概要（英文）：Langlands correspondence and Langlands functoriality are major problems in number theory. Endoscopies are special types of Langlands functoriality and the theory of the ones corresponding to the classical groups are drastically developed recently.
Contrary to this, very few is known about endoscopies for covering groups. In this study, we obtained basic results relating to the endoscopic transfer for a small covering group and the trace formula for another small covering group.

研究分野：整数論

キーワード：簡約代数群の被覆群の表現

１．研究開始当初の背景
現在の整数論の中心的な問題の一つがラングランズ対応やラングランズ関手性の確立である。これは類対論の一般化のひとつであり、簡約代数群の表現とガロア群の表現との対応、及びこの対応関係を反映すると考えられる簡約代数群の表現の間の対応関係を考察するものである。ラングランズ対応にもラングランズ関手性にも局所版と大域版があり、どちらも整数論の大問題であったが、本研究課題の申請時には GL(N) の局所ラングランズ対応が証明されており、また、多くの数学者の４０年以上にわたる跡公式の研究の成果として、古典群の局所ラングランズ対応と古典群と GL(N) とのあいだの大域的なラングランズ関手性の証明が最終段階に至っていた。
一方で、整数論においては２次形式論と関連したテータ級数も重要な研究対象であるが、これは簡約代数群ではなくその被覆群の表現と対応したものである。この例のように整数論においては、簡約代数群の表現だけではなく、簡約代数群の被覆群の表現も重要な研究対象であり、志村対応のように古典群の表現と簡約代数群の被覆群の表現が対応する例も知られていた。この志村対応は被覆群の場合のラングランズ関手性とみなすことができ、本研究課題の申請時においては、他にも簡約代数群の被覆群の場合のラングランズ関手性とみなせる例が少しづつでてきていた。しかし、これらの例以外には、本研究課題の申請時には簡約代数群の被覆群の場合のラングランズ関手性については、あまり分かっておらず、特に分裂していない簡約代数群の被覆群の研究はほとんどなされていない状況であった。
このため、整数論において研究がなされるべき対象と考えられるにもかかわらず、本研究課題の申請時にはあまり研究が進んでおらず、よく分かっていない状態であった簡約代数群の被覆群のラングランズ関手性について研究を行うこととした。
また、ラングランズ対応においては簡約代数群の表現とラングランズ・パラメーターが対応すると予想されているのであるが、ラングランズ対応によって対応している表現とラングランズ・パラメーターのそれぞれの不変量の間の関係については未知のことが多い。しかし、研究開始当初においては、簡約代数群の場合に、ラングランズパラメーターと表現の不変量との関係について整数論的に興味深い研究がいくつか知られていた。

２．研究の目的
簡約代数群のラングランズ対応においてはパケットと呼ばれる概念がある。これは同じラングランズ・パラメーターに対応する表現の集合であるが、この内部構造を調べる為にエンドスコピーと呼ばれるものが使われる。エンドスコピーはラングランズ関手性の特別なものであり、簡約代数群とエンドスコピー群との間の表現の対応を記述するものとなっている。これによりパケットの中の表現をエンドスコピー群の表現との関係によって記述することができるのである。また、ラングランズ対応が示されている簡約代数群の表現とエンドスコピーにより対応させることにより、エンドスコピー群のラングランズ対応を示すといったことにも使われる。
エンドスコピーは簡約代数群においても一般にはまだ予想なのではあるが、上記の研究開始当初の背景に書いた古典群の局所ラングランズ対応と古典群と GL(N) とのあいだの大域的なラングランズ関手性の証明もこの場合のエンドスコピーの理論を証明することにより得られるものである。
一方で、簡約代数群の被覆群のエンドスコピーについては一般の場合には予想の定式化も行われていない状況であったため、本研究課題においては、当初、簡約代数群の被覆群のエンドスコピーについて調べ、そもそも簡約代数群の被覆群に対して、エンドスコピーの理論が有り得るのかどうか？もし、エンドスコピーがあるとすれば、簡約代数群の被覆群に対するエンドスコピー群はいかなるものなのか？簡約代数群の被覆群の表現とエンドスコピー群の表現の間の関係はどのようなものなのか？といったことについて研究することを目的としていた。
また、簡約代数群のエンドスコピーは跡公式と密接な関係がある予想であり、上記の古典群に対する結果も跡公式に関する研究の成果として得られていた。そのため、簡約代数群の被覆群のエンドスコピーに関する上記の問題について研究するために、本研究課題においても簡約代数群の被覆群の跡公式について研究することも目的とした。特に SL(2) の被覆群の場合には池田保氏(京都大)との共同研究を本研究課題以前に行っていたため、本研究課題においても SL(2) の被覆群について研究を進めることを目的としていた。
また、簡約代数群の表現の不変量のいくつかはエンドスコピーと関係していた。このため、簡約代数群の被覆群のエンドスコピーとその跡公式に関する研究が簡約代数群に対するものと同様に進展した場合には簡約代数群の被覆群の表現の不変量について研究することも可能になると考えられ、上記の研究が順調に進展した場合にはこのような表現の不変量に関する研究も行うことを目的としていた。

３．研究の方法
簡約代数群の場合のエンドスコピーとは、元の簡約代数群とエンドスコピー群と呼ばれるもうひとつの簡約代数群との間の調和解析的な対応といえる。それと類似のものを簡約代数群の被覆群に対して求めようとすると、まず、エンドスコピー群を求めなければ

ならない。簡約代数群の場合にはエンドスコピー群はその簡約代数群に対応するラングランズ双対群とエンドスコピー的データを使って定義されるのであるが、ラングランズ双対群は基本的に簡約代数群に対して定まるものであって、本研究課題が目的としている簡約代数群の被覆群に対して同じ手段をつかうことは現段階では難しい。
そのため、本研究課題においては、これまで知られている簡約代数群の被覆群のエンドスコピーとみられる結果から類推してエンドスコピー群の候補を定めることにした。先にも述べたように、大雑把にいうとエンドスコピーとは元の群とエンドスコピー群との間の調和解析的な対応関係なので、エンドスコピー群の候補として類推した群と元の簡約代数群の被覆群の間に調和解析的な関係が存在すれば、候補としたエンドスコピー群が正しいものであることが確認されると考えられる。
本研究課題以前に知られていたいくつかの例からみて、簡約代数群の被覆群のエンドスコピー群を定義することは簡約代数群の場合と比べてより繊細なものが要求されると考えられた。そのうえに、知られている簡約代数群の被覆群のエンドスコピーの例が限定的であったため、一般の簡約代数群の被覆群に対してエンドスコピー群の定義を与えようとする前に、まずはエンドスコピーとみられる現象の例を増やすことが必要であると考えられた。このため、とりあえず候補を予想して研究をする方法をとった。
また、最初から一般の簡約代数群の被覆群を扱うことは難しいと考えられたため、本研究課題においては GL(2) の内部形式の被覆群についてまず研究を行うこととした。
現時点では簡約代数群の被覆群のエンドスコピーについては概念的な定義等がないので、GL(2) の内部形式の被覆群を扱うには、実際に被覆群を構成してみなければならない。特に被覆群を定める 2-コサイクルを与えることが研究のために必要であると考えられた。SL(2) の内部形式については被覆群の構成が知られていたが、そこから得られる 2-コサイクルは非常に複雑なものとなり、これを使って本研究課題を遂行することは現時点では困難であると考えられるため、定義体に条件をつけた上で、別のより扱いやすい GL(2) の内部形式の被覆群を構成して、そこから得られる 2-コサイクルを使った研究を行った。
エンドスコピーには局所的なエンドスコピーと大域的なエンドスコピーがある。簡約代数群の場合には局所と大域の両面が相互に関係しながら研究が発展してきていたのだが、基本的には局所的なエンドスコピーについて先に理解されて、それから大域的なエンドスコピーについての理解が進むという順序であった。このため、本研究課題においては局所的なエンドスコピーについて研究を行うことにした。GL(2) の内部形式の被覆群の局所的なエンドスコピーにおいては、まず、エンドスコピー群の軌道積分と GL(2) の内部形式の被覆群の軌道積分との対応関係を確立する必要があるため、本研究課題においても、これまでに知られているエンドスコピーとみなせる例、特に GL(2) とそのエンドスコピー群との間の対応関係を参考にして、GL(2) の内部形式の被覆群の場合の対応関係を調べることにした。
この軌道積分の間の対応関係においては移送因子を定めることがとても重要である。簡約代数群の局所的なエンドスコピーにおいても移送因子が簡約代数群とエンドスコピー群との間の調和解析的な対応関係の記述において中心的な役割を果たしていた。簡約代数群の被覆群の場合においても同様に移送因子が中心的な役割をはたすと予想されたので、本研究課題においても移送因子の研究を行うこととした。簡約代数群の場合の移送因子はラングランズ双対群とエンドスコピー的データを使って定義されるのであるが、上記でも述べたように、簡約代数群の被覆群に対してはラングランズ双対群を使った定式化は現状では難しいので、これまでに知られている場合を参考に GL(2) の内部形式の移送因子について研究を行った。
移送因子は簡約代数群の場合においても繊細に振る舞うものであるが、この研究の過程で、GL(2) の内部形式の被覆群の移送因子についても繊細に振る舞うように定義することが必要であることが分かって来た為、その振る舞い方を調べるために GL(2) の内部形式の被覆群の表現をいくつか具体的に構成して、それとエンドスコピー群の表現を比較する研究を行った。これにより、GL(2) の内部形式の被覆群のエンドスコピーは、簡約代数群のときのエンドスコピーや、これまで被覆群に対して知られていたエンドスコピーと見られる例とは少し違う挙動を示す可能性がでてきた。
本研究課題を開始した時点では、簡約代数群の場合やこれまで知られていた被覆群の例から、GL(2) の内部形式の被覆群のエンドスコピーに関する研究の結果を用いて SL(2) の内部形式の被覆群のエンドスコピーについての研究を行うことを予定していたが、このような予想外のことが起きたため SL(2) の被覆群のエンドスコピーについても研究を行うこととした。SL(2) の被覆群のエンドスコピーについては、池田保氏(京都大)と研究代表者との共同研究により既に局所的な結果や大域的な結果がいくつか得られていた為、この方向での研究を進めて行く為に跡公式の研究を行った。
跡公式はスペクトル側と幾何側との等式である。本研究課題においては、今後の研究の必要性から跡公式の幾何側の全ての項とスペクトル側の計算を行った。

４．研究成果

本研究課題の目的のひとつは簡約代数群の被覆群のエンドスコピーについての研究である。このため、まず、GL(2) の 2 次の内部形式の被覆群の局所的なエンドスコピーについて研究を行った。エンドスコピーを考察するためには、まずエンドスコピー群を定義しなければばならない。上にも書いたが簡約代数群の場合にはエンドスコピーはラングランズ双対群とエンドスコピー的データを使って定義されていた。しかし、簡約代数群の被覆群の場合にはラングランズ双対群を使った定式化が難しいため、簡約代数群のときと同様にエンドスコピー群を定義することはできていない。それ以前に簡約代数群の被覆群に対してはエンドスコピー群が存在するのかどうかすら一般には分かっていない状況である。簡約代数群の被覆群のエンドスコピーとみなせる現象について本研究以前に知られていた例は分裂しているものが大半であり、GL(2) の内部形式の被覆群のように分裂していないものは殆ど知られておらず、分裂していない簡約代数群の被覆群については研究代表者が本研究課題以前に研究した GL(2) の内部形式と SL(2) の内部形式の奇数次の被覆群のエンドスコピー程度しかなかった。本研究課題においては、これまでに行われた簡約代数群の被覆群のエンドスコピーの研究から、エンドスコピー群を PGL(2) と推測した。

簡約代数群のエンドスコピーの場合には簡約代数群とエンドスコピー群との間の調和解析的な対応関係は移送因子によって記述される。簡約代数群の場合にはこれもラングランズ双対群やエンドスコピー的データ等を使って定義されるため本研究課題で研究する GL(2) の内部形式の被覆群に対してはこのような定義をすることができない。簡約代数群の被覆群は 2-コサイクルにより定義されるが、簡約代数群の被覆群のエンドスコピーに対する移送因子の概念的な定義方法が分かっていない現状では被覆群を定める 2-コサイクルを具体的に定めた上で、移送因子を 2-コサイクルに依存して定めることになる。このため比較的簡易な 2-コサイクルの構成を行うために GL(2) の定義体に 1 の原始 4 乗根を含むという条件を課した。一般に移送因子はいくつかのものを組み合わせて定義されるが、本研究課題においては、上記の定義体に関する条件の下で、 GL(2) の被覆群の場合の定義と類似性をもつように、いくつかの部分を除いてではあるが移送因子の定義の候補を得た。

上でも述べたように分裂していない簡約代数群の被覆群に対してはエンドスコピーがあるかどうかもほとんど分かっていない。GL(2) の内部形式の奇数次の被覆群に対しては局所的なエンドスコピーがあることを研究代表者は示していたが、SL(2) の被覆群の場合から考えると、奇数次の被覆群と偶数次の被覆群とでは挙動が大きく異なる可能性もある。また、整数論においてこれまで現れてきたのは SL(2) や Sp(2) の 2 次の被覆群であり、被覆群の中でも 2 次の被覆群は特に興味をもたれる群である。また、SL(2) 等の例をみると、2 次の被覆群は他の次数のものに比べて繊細で複雑な挙動を示す可能性がある。移送因子はエンドスコピーの対応関係の記述において中心的な役割をはたすもののひとつであり、現状ではまだ不完全な結果ではあるが、GL(2) の内部形式の 2 次の被覆群のエンドスコピーに対して移送因子の存在が示唆されたことは、分裂していない簡約代数群の被覆群に対してもエンドスコピーが存在する可能性が高いことを意味している。

このように簡約代数群の分裂していない被覆群に対してもエンドスコピーの存在が示唆されたことにより、今後は分裂していない簡約代数群のエンドスコピーに対しても、簡約代数群のエンドスコピーのような研究が現れる可能性がある。また、簡約代数群のエンドスコピーの研究は移送因子等の定義をもとに跡公式を使って行われてきた。今後は GL(2) の内部形式の 2 次の被覆群に対しても同様の研究が進められることが期待され、本研究はそのような研究の基礎となると考えられる。

本研究課題では、GL(2) の内部形式の 2 次の被覆群に対するエンドスコピーを別の方向から調べる為に、この群の表現をいくつか構成した。これにより、GL(2) の内部形式の 2 次の被覆群のエンドスコピーは GL(2) の 2 次の被覆群のエンドスコピーよりも繊細で微妙な振る舞いをする可能性があることが示唆された。簡約代数群の場合にはエンドスコピーは簡約代数群だけではなく、その内部形式も一緒に考えることが自然であることが分かっているのであるが、簡約代数群の被覆群の場合の内部形式の位置づけに対してはもう少し微妙な考察が必要となることを本研究が示唆している可能性がある。

また、本研究に先立って研究代表者は SL(2) の被覆群の局所的なエンドスコピーについて池田保氏(京都大)との共同研究を行ってきていた。上記のように GL(2) の内部形式の 2 次の被覆群のエンドスコピーが当初予想されたよりも微妙なものである可能性がでてきたため、本研究課題においても SL(2) の被覆群のエンドスコピーについて研究を進めることとした。

古典群のエンドスコピーの研究においては跡公式の研究が重要な役割を果たした。このため、本研究課題においては SL(2) の被覆群の跡公式について研究をおこなった。跡公式を使ってエンドスコピーを研究するにはその幾何側を調べることが必要である。この跡公式は発散部分を扱うために複雑化するのであるが、本研究課題においては、幾何側の項をユニポテント項も含めて全て求めた。

簡約代数群のエンドスコピーの場合には、跡公式の研究は、跡公式の安定化にむけて、求めた跡公式の不変的でない部分をスペクトル側と関係した量で表すことを行う。本研究課題においても、SL(2) の被覆群の跡公式の主要部分の不変的でない部分をスペクトル側と関係した量で表した。また本研究課題においては SL(2) の被覆群の跡公式のスペクトル側についても計算を行った。
本研究課題に先立つ研究代表者と池田保氏(京都大)との共同研究においては、SL(2) の被覆群のエンドスコピーを跡公式を用いて研究するための結果が得られていた。本研究課題によって得られた跡公式は今後 SL(2) の被覆群のエンドスコピーを跡公式を用いて研究するための基礎である。また、SL(2) の被覆群のエンドスコピーはその次数によって振る舞いが大きく異なり、そもそもエンドスコピー群自体が偶数次と奇数次で異なったものになることが分かっている。今後は、得られた跡公式のより詳細な研究により、このような次数によるエンドスコピーの振る舞いの違いが跡公式とどのように対応しているのかが明らかにされることが望まれ、本研究課題で得られた結果はこのような研究に続いていくものと考えられる。
本研究課題で研究した簡約代数群の被覆群のエンドスコピーについては上でも述べたように未知のことが多い状況である。本研究課題においても、予想よりも繊細な事象に遭遇し、試行錯誤しながら研究を行った。簡約代数群の被覆群のエンドスコピーについて理解するためには今後も研究が必要であるが、本研究課題で得られた知見は今後の研究の出発点の一つになるのではないかと思っている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　1　件）
① 平賀郁 "On packets for inner forms of SL(N)." 2014 Pan Asian Number Theory, 2014 年

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
平賀　郁（HIRAGA, Kaoru）
京都大学・理学研究科・講師
研究者番号：１０２６０６０５

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
（　　）