様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月　　６ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2018
課題番号：２６４０００１１

研究課題名（和文）p進体および有限体上の等質空間の表現論

研究課題名（英文）Representation theory of homogeneous spaces over p-adic or finite fields

研究代表者
加藤　信一（Kato, Shin-ichi）

京都大学・国際高等教育院・教授

研究者番号：９０１１４４３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：p進体上の簡約群とその上の対合的自己同型シグマに付随する対称空間の表現ならびに調和解析を，対応する群の表現論を一般化する形で研究した．相対尖点表現は群の尖点表現の対称空間上の対応物で最も基本的な対称空間の表現と見なされるものである．われわれは相対尖点表現が非等方的な極大シグマ分裂トーラスに対応する対称空間の表現であるという作業仮説の下で，一般線型群に関連する対称空間について，相対尖点表現をシグマ安定的な放物型部分群からの尖点表現の誘導表現として構成することに成功した．またシグマ分裂的な放物型部分群のからのジェネリックな誘導表現としては相対尖点表現が得られないことも示すことも出来た．

研究成果の学術的意義や社会的意義
p進体上の対称空間の表現論は，それ自身が代数群の表現論として重要な位置を占めるだけではなく整数論の観点からも研究が欠かせないものである．本研究では作業仮説を提出して，最も基本的な相対尖点表現を誘導表現から構成している．これは，別のタイプの誘導表現からは相対尖点表現が得られないというもう一つの結果と合わせて，作業仮説を補強しており．p進対称空間の表現論の全体像の解明に大きく寄与するものである．またここで与えられた誘導表現による構成法は整数論にも応用されるものと思われる．
なお表現論は対称性を扱う数学的分野であることから，得られた成果は自然現象の対称性の理解にも役立つことが期待される．

研究成果の概要（英文）：We studied representations and harmonic analysis of symmetric spaces associated to reductive groups with involution sigma on them over p-adic fields, as a generalization of the representation theory of these groups.
Relatively cuspidal representations for symmetric spaces are the counterparts of cuspidal representations for groups and viewed as the most fundamental tools in the study of the representation theory of symmetric spaces. Under the working hypothesis that relatively cuspidal representations should correspond to anisotropic maximal sigma-split tori, we succeeded in constructing relatively cuspidal representations as induced representations of cuspidal representations from sigma-stable parabolic subgroups for certain types of symmetric spaces associated with general linear groups. We also showed that relatively cuspidal representations cannot appear as induced representations from sigma-split parabolic subgroups if the inducing representations have generic parameters.

研究分野：表現論

キーワード：対称空間　表現論　簡約群　p進体　有限体

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

実数体上の対称空間の表現論は，実半単純リー群の表現論の自然な拡張として，フレンステッド=イェンセン，大島，ドゥロームなどの貢献により大きく発展してきた．そこでは対称空間上の二乗可積分表現(離散系列表現)を軸にして表現論や調和解析が研究されてきた．

これに対してp進体上の対称空間の表現論では，研究代表者と研究協力者の高野啓児（香川大学）は，相対尖点表現の概念を提唱して，これを用いて対称空間の表現論が群の表現論，あるいは実数体上の対称空間の表現論と並行して構築される可能性を示した．これを説明すると次のようになる：p進体上の簡約群 G の対合的自己同型シグマに関して定まる対称空間，つまり H をシグマの固定化部分群とするとき得られる等質空間 G/H を考える．この対称空間上の関数空間で実現される表現は，(H-)ディスティンギッシュトな表現とよばれる H-不変な1次形式を持った表現と捉えることが出来る．そして対称空間上のコンパクトな台を持つ関数空間上に実現されるディスティンギッシュトな表現を相対尖点表現と定義するのである．この相対尖点表現は群の尖点表現の自然な拡張となっている．加藤・高野(2008) は任意のディスティンギッシュトな既約表現に対して，シグマ分裂な放物型部分群(対称空間を定める対合シグマでオポジットに移るようなもの)とそのレビ部分群の相対尖点既約表現の組をとって，元の表現が放物型部分群からの誘導に含まれるようにできる，という部分表現定理を確立した．これはジャッケによる群の部分表現定理の対称空間版である．さらには，表現が相対尖点的になるかどうかの判定条件が相対ジャッケ写像の像の消滅によってわかる，というジャッケの定理の対称空間への拡張も得られたのであった．この他に加藤・高野により対称空間の表現が二乗可積分，もしくは緩増加になるための判定条件なども群表現の場合と同様の定式化で得られるというように，p進体上の対称空間の表現論が簡約群の表現論と並行する形で研究できることがわかってきた．以上に加えて他の研究者の寄与もあり，有限体上の表現論も取り込んでp進体上の対称空間の表現論，調和解析を構築する基盤が整い，本研究課題の追求など次の進展を見込める段階に進んできたのである．

２．研究の目的

本研究課題の目的は，実数体上の対称空間の表現論を参考にして，有限体上の表現論も視野に入れながら，p 進体上の対称空間の表現論に，通常の簡約群の表現論の自然な拡張となるような枠組みを，できるだけ基礎体を越える形で与えることである．より具体的に書くと以下のようになる：簡約群の尖点的でないすべての既約表現は尖点表現からの誘導に部分表現として含まれる．このため簡約群の表現論においては尖点表現，ならびにその放物型部分群からの誘導表現の解析が必要である．尖点表現のp進対称空間上の類似である相対尖点的表現が，部分表現定理や相対ジャッケ写像による特徴付けなどを通じて簡約群の尖点表現同様の役割を果たすことがわかってきたことに鑑み，対称空間の表現，つまりディスティンギッシュトな表現の構造を相対尖点的表現を中心にして考察することが重要であることが分かる．

さてディスティンギッシュトな尖点表現は加藤・高野によって相対尖点的になることが知られている．そこで本研究ではもっぱら誘導表現を研究対象として，非尖点的な相対尖点表現ならびにディスティンギッシュトな誘導表現を研究対象とする．

(1)非尖点的な相対尖点表現の構成．加藤・高野によって構成された例を解析することで，どのような場合に誘導表現として相対尖点表現が得られるかを研究する．その際には有限体上の表現論も参考にして，トーラスとの対応を考えることが有効になる．なおこの研究の過程で，ディスティンギッシュトな尖点表現それ自身についての知見を得ることも目的としたい．

(2)誘導表現の研究．部分表現定理によれば任意の既約ディスティンギッシュト表現はシグマ分裂的な放物部分群からの相対尖点表現の誘導に含まれるのであるが，もし相対尖点表現それ自身がこのような誘導表現に含まれてしまうと，簡約群の場合と状況が異なってしまい相対尖点表現を軸としたディスティンギッシュト表現のハリシュチャンドラ流の記述が難しくなってしまう．よってシグマ分裂する放物型部分群からの誘導表現を精査してこのようなことが起こらないことを示す必要がある．なお誘導表現がどのように分解されて対称空間の表現が得られるかを調べることも目的の一つである．

３．研究の方法

(1)　p 進体上の簡約群の表現論と同じく，放物型部分群の（レビ部分群の）表現（とりわけ尖点的，または相対尖点的なもの）からの誘導表現が主要な研究対象となる．このとき誘導に用い

る表現，放物型部分群の選択も鍵となる．また誘導表現の分析には群表現の場合と同様にジャッケ加群の分析が基本的な道具になる．

(2)　p 進体上の対称空間の場合は，それに加えて対称空間の構造論(軌道分解など)や，表現上の不変1次形式の振る舞いを記述するために加藤・高野とラジエが独立に定式化した相対ジャッケ写像が有効である.この相対ジャッケ写像を調べるために行列成分を解析して像の消滅を調べ,これによって与えられた表現が相対尖点的であるかどうかの判定を行う.

４．研究成果

（１）p 進簡約群の表現の研究には尖点表現を知ることが必要である．さて加藤・高野によってディスティンギッシュトな尖点表現は相対尖点的になることがわかっている．よってこれらディスティンギッシュトな尖点表現は相対尖点表現の理解にとって重要な役割を果たす．これらの表現のハッキムやマーナハンによる研究を観察すると，非等方的な極大トーラスでシグマ分裂する（シグマの作用で逆元に移る）ものの存在との関連が示唆される．一方加藤・高野はいくつの場合について相対尖点表現の具体例を誘導表現として与えたのであるが，これをトーラスの観点から眺めてみて，相対尖点表現には非等方的なシグマ分裂極大トーラスが対応していることを観察した．この「対応」を元にして，われわれは次のような一連の作業仮説①-③を得るに至った：

①　簡約群 G にはシグマ分裂極大トーラス S で非等方的なもの（中心部分を除いて）が存在する．

②　S を極大トーラス（中心部分を除く）に持つようなレビ部分群のディスティンギッシュトな尖点表現が存在する．

③　この表現をシグマ安定的な放物型部分群から誘導すれば相対尖点表現が得られる．

この作業仮説は，これまで知られている結果と合致していることも確認した．以上の作業仮説の構築ならびに確認が本研究の第一の成果である．

（２）次に(1) の作業仮説の検証が課題となる．しかし現状でのディスティンギッシュトな尖点表現に対する理解が不十分であることなどから,本研究で(1)の作業仮説を一般論として展開するのではなく，ディスティンギッシュトな尖点表現を「法」として考察することとした．そわれわれが扱うのは次の 3 つの型の一般線型群に関わる対称空間である：

- E を p 進体 F の 2 次拡大として,G は E 上の n 次一般線型群,H は F 上の n 次一般線型群. この場合シグマが E/F のガロア対合になる.
- 上記と同じ設定で G が F 上の 2n 次一般線型群，H が E 上の n 次一般線型群.
- G が F 上の n 次一般線型群，H が F 上の n-r 次一般線型群と r 次一般線型群の直積.

（最後の 2 つの場合はどちらも対合 シグマが G の内部自己同型で与えられる場合である．）これらの対称空間について，作業仮説に述べたような非等方的なシグマ分裂極大トーラスの系列を与え，これを極大トーラスに持つようなレビ部分群の系列を構成した．またハッキムらによる先行研究を用いて，このトーラスに対応するレビ部分群のディスティンギッシュトな尖点表現を与えた．この表現に対してシグマ安定放物型部分群からの誘導を行ったところ，相対尖点表現が得られることを証明することが出来た．これらの結果は雑誌論文①②で報告されている．

（３） 上記（１）（２）ではシグマ安定な放物型部分群からディスティンギッシュトな表現を誘導して得られた表現が相対尖点表現になることを（ある種の条件の下で）見た．一方部分表現定理は，すべてのディスティンギッシュトな表現はシグマ分裂する放物型部分群の相対尖点表現からの誘導表現の部分表現になることを主張する．ハリシュチャンドラの「尖点形式の哲学」から考えると，後者の表現は（シグマ分裂する放物型部分群が G 全体と一致しない限り）相対尖点的にはなれないと考えられる．そこでシグマ分裂する放物部分群からのディスティンギッシュト表現の誘導について研究して次の結果を得た：「ジェネリック」なディスティンギッシュト表現を用いてシグマ分裂する放物部分群から誘導すると得られた表現は相対尖点的にはなれない．この結果は研究論文"Relative non-cuspidality of representations induced from split parabolic subgroups"（高野啓児と共著）として専門誌に投稿中である．この論文の「ジェネリック」性の仮定を取り除いた形の定理を確立することは次の目標である．なお群の表現論の場合と同様に，相対尖点表現の誘導（シグマ分裂放物部分群から）による，ディスティン

ギッシュト表現の分類や，シグマ分裂する放物型部分群から相対尖点表現を誘導して得られた表現の中のディスティンギッシュト表現の記述は今後の研究課題となる．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① S.Kato，K. Takano, On some relatively cuspidal representations: Cases of Galois and inner involutions on GL_n， Osaka Journal of Mathematics，査読有，2020 掲載予定

② 加藤信一, 高野啓児, On some relatively cuspidal representations of GL_n over p-adic fields, 数理解析研究所講究録，査読無，2103巻，2019, 14—27

〔学会発表〕（計 3 件）

① 加藤信一，高野啓児，On some relatively cuspidal representations: Galois and inner involutions on GL_n，RIMS共同研究(公開型)「表現論と代数、解析、幾何をめぐる諸問題」，2018

② 加藤信一，p進対称空間に付随した表現について，弘前 表現論 小研究集会，2017

③ 加藤信一，p進対称空間の相対尖点表現について，沖縄 表現論 研究小集会，2015

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
特になし

６．研究組織

(1)研究分担者
なし

(2)研究協力者
研究協力者（連携研究者）氏名：高野啓児
ローマ字氏名：(TAKANO KEIJI)
所属研究機関名：香川大学
部局名：教育学部
職名：准教授
研究者番号（8 桁）：40332043

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。