

令和 2 年 6 月 25 日現在

機関番号：15101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2019

課題番号：26400014

研究課題名(和文) 表現論における運動量写像と非可換不変式論

研究課題名(英文) Moment maps in representation theory and noncommutative invariant theory

研究代表者

橋本 隆司 (HASHIMOTO, Takashi)

鳥取大学・教育支援・国際交流推進機構・教授

研究者番号：90263491

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：不定値直交群が自然に作用するシンプレクティック・ベクトル空間上の運動量写像を正準量子化することにより， (g, K) -加群を構成し，Howe双対性を適用して $sl(2)$ の有限次元表現に付随するその既約表現を構成し， K -タイプ公式の計算に成功した．これにより表現論的不変量であるGelfand-Kirillov次元およびBernstein次数を求めた．これらのGelfand-Kirillov次元はすべて極小表現に対応する (g, K) -加群のそれに等しいこと，および，Bernstein次数が極小表現のそれとそれ以外のものとを区別することが明らかになった．

研究成果の学術的意義や社会的意義

運動量写像は不変式論等，代数幾何学において非常に重要な役割を果たしていることは周知の事実であるが，本研究により，運動量写像が非可換な世界と可換な世界とをつなぐ架け橋の役割を担っていることが明らかとなり，運動量写像が表現論においてもまた，重要な役割を果たしていることが強調できた．系のもつ対称性が運動量写像により記述されるという点において，運動量写像はLie理論的に極めて自然で，かつ，座標系を用いて具体的に表せることが，運動量写像が数学における様々な場面において，このように重要な役割を果たすのだと思われる．

研究成果の概要(英文)：The indefinite orthogonal group $O(p, q)$ naturally acts on a symplectic vector space, with a moment map. We construct a (g, K) -modules of $O(p, q)$ by quantizing the moment map, and apply the Howe duality to obtain irreducible modules that correspond to the finite-dimensional representations of $sl(2)$, as well as their K -type formulas. We obtain Gelfand-Kirillov dimension and Bernstein degree of the modules, which are the representation-theoretic invariants, from the K -type formula. We find that the Gelfand-Kirillov dimension of our modules are all equal to the one of the minimal representation of $O(p, q)$, which corresponds to the trivial representation of $sl(2)$, and that Bernstein degree distinguishes the minimal representation from the others.

研究分野：表現論

キーワード：運動量写像 不定値直交群 極小表現 Howe双対性 Gelfand-Kirillov次元 Bernstein次数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

非コンパクトな古典型既約 Hermite 対称空間上の多項式係数微分作用素環の中、極大コンパクト部分群による随伴作用で不変な微分作用素のなす部分環は行列式、またはパフィアンを用いて記述される生成系を持ち、これら生成系は Capelli 恒等式において本質的な役割を演じることは周知の事実である。平成 23 年度以前の研究において、これら生成系の母関数が、Lie 群の正則離散系列表現における Lie 環の表現作用素から構成される捩れ運動量写像の行列式、またはパフィアンを用いて与えられることがわかっていた。平成 23 から 25 年度における科研費基盤研究 (C) (一般)「表現論的不変量と運動量写像」において、正則離散系列表現における Lie 環の表現作用素の全表象から構成される捩れ運動量写像をモデルとして、連結な複素簡約 Lie 群、および、その Lie 代数の双対空間の半単純元 λ に対し、一般旗多様体上の捩れ正則余接束から λ の余随伴軌道との間に同変なシンプレクティック同型写像を構成する一方 (以上は半単純軌道の話)、冪零軌道に関しては、シンプレクティック・ベクトル空間上の運動量写像の正準量子化が、自然に oscillator 表現 (= Segal-Shale-Weil 表現) を生み出すことを明らかにした。先に述べた捩れ運動量写像は、非可換な世界から可換な世界へと向かうベクトルとして捉えることができ、一方、運動量写像の量子化は、逆に、可換な世界から非可換な世界へと向かうベクトルとして捉えることができる。可換から非可換、非可換から可換と、向きかは互いに反対ではあるが、いずれにも運動量写像が深く関与していることが興味深い。さらに、当該研究において、量子化の際に採用したラグランジアン部分空間の運動量写像による像が、重要な表現論的不変量の一つであるその随伴多様体に等しいことを明らかにした。

以上のことから、平成 26 年度から令和元年度までの本研究においては、運動量写像の Lie 群の表現論におけるさらなる重要性を明らかにすべく、不定値直交群に焦点を当て、その極小表現およびその周辺において、同様な現象が起こっていることを確認する必要がある。

2. 研究の目的

本研究の大きな目的は、Lie 群および Lie 代数の表現論的枠組みの中で、運動量写像と非可換代数を有機的に相互作用させることにより、不変式論で鮮やかな役割を果たす Capelli 型等式に対するアプローチを試み、その結果として得られる新たな知見をもって Capelli 元を究極的に理解し、翻って表現論へのフィードバックを図ることである。特に、平成 26 年度から令和元年度における本研究においては、以下の 3 点を目的とした。

- i. 運動量写像および余随伴軌道の境界の定義函数を用いて捩れ余接束上で特性サイクルを記述し、これにより余随伴軌道の同変体積を計算する；
- ii. 随伴多様体、随伴サイクル、Gelfand-Kirillov 次元や Bernstein 次数等の不変量を運動量写像を用いて記述する；
- iii. 上で述べたと Lie 環の表現作用素の表象から構成される捩れ運動量写像の行列式またはパフィアンと、Chern 類や Euler 類など特性類との関係を明らかにする。さらに、これらの非可換版である捩れ運動量写像の量子化の行列式、またはパフィアンとの Capelli 元の像との関係を明らかにする。

本研究の特色および独創性は、Lie 理論的に極めて自然に構成される運動量写像を用いた余随伴軌道の同変体積の計算、表現論的不変量の記述にある。

3. 研究の方法

パーソナルコンピュータ上で数式処理システムを援用した計算により予想式を立てた後、その

証明を見つけるという手順により、以下、研究成果で述べる結果を得ることが可能になった。これは手計算のみによる方法では不可能であった。また、表現論の文献だけでなく、シンプレクティック幾何に関係する文献に当たることにより、運動量写像の量子化から oscillator 表現を構成するという着想を得た。さらには、文献だけではなく、国内はもとより、海外で開催されるこれらの分野に関連する研究集会やセミナーに参加を行ない、本研究の計画および方法の妥当性を判断し、また新たな着想を得ることができた。

4. 研究成果

残念ながら、余随伴軌道の同変体積の計算に関しては、具体例による計算が散在するだけの結果になってしまったが、シンプレクティック・ベクトル空間上の運動量写像を正準量子化することにより自然に oscillator 表現が得られること、この手法を不定値直交群 $O(p,q)$ の場合に適用すれば、その極小表現が得られること、および、極小表現は非コンパクト局所好一対 $(O(p,q), sl(2))$ に関する Howe 双対性のもとで $sl(2)$ の自明表現 (1 次元表現) に対応することを明らかにすることができた。また、これら研究をさらに推し進め、不定値直交群の極小表現を包含する形で、 $sl(2)$ の有限次元表現に対応する $O(p,q)$ の (g,K) -加群に対し、その K -type 公式、Gelfand-Kirillov 次元、Bernstein 次数を計算することに成功し、それにより、これら (g,K) -加群の既約性を証明することができた。また、ここで構成した加群は $sl(2)$ の作用に関して、最高ウェイト元からなるものと最低ウェイト元からなるものとの 2 つのタイプがあるが、どちらも $sl(2)$ の既約有限次元表現に付随するものであり、既約な有限次元表現は最高ウェイト表現でも最低ウェイト表現でもあるので、ここで構成した 2 つのタイプの加群は同型であることが予想されるが、その予想が正しいことも証明することができた。

非可換な世界から可換な世界との往来に、運動量写像が本質的な役割を担っていることを、また一つ明らかにすることができた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 橋本隆司	4. 巻 2103
2. 論文標題 sl ₂ の有限次元表現に付随する $0(p, q)$ の (g, K) 加群	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takashi Hashimoto	4. 巻 57
2. 論文標題 The moment map on symplectic vector space and oscillator representation	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 553-583
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2017-0006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takashi Hashimoto	4. 巻 66
2. 論文標題 A twisted moment map and its equivariance	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 563-581
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 橋本隆司	4. 巻 1925
2. 論文標題 Quantization of the moment map on symplectic vector space and the oscillator representation	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 103-116
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 橋本隆司
2. 発表標題 sl ₂ の有限次元表現に付随するO(p,q)の(g,K)加群
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）"表現論と代数，解析，幾何をめぐる諸問題"
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takashi Hashimoto
2. 発表標題 (g,K)-module of O(p,q) associated with the finite-dimensional representation of sl ₂
3. 学会等名 1147th AMS Meeting, American Mathematical Society (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 橋本隆司
2. 発表標題 sl ₂ の有限次元表現に付随する不定値直交群の(g,K)-加群 2 --Gelfand-Kirillov次元とBernstein次数--
3. 学会等名 2017年度表現論ワークショップ
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 橋本隆司
2. 発表標題 sl ₂ の有限次元表現に付随する不定値直交群の(g,K)-加群
3. 学会等名 2016年度表現論ワークショップ
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 橋本隆司
2. 発表標題 不定値直交群の極小表現を目指して
3. 学会等名 不変性と双対性
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 橋本隆司
2. 発表標題 不定値直交群の極小表現を目指して(その2)
3. 学会等名 2015年度表現論ワークショップ
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 橋本隆司
2. 発表標題 Quantization of the moment map on symplectic vector space and the oscillator representation
3. 学会等名 RIMS研究集会"表現論と調和解析の新たな進展"
4. 発表年 2014年

1. 発表者名 Takashi Hashimoto
2. 発表標題 Quantization of the moment map on symplectic vector space and the oscillator representation
3. 学会等名 International Congress of Mathematicians (国際学会)
4. 発表年 2014年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----