

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 8 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400017

研究課題名(和文) レゾルベント型跡公式と関連する保型形式とゼータ関数の研究

研究課題名(英文) Resolvent type trace formulas, automorphic forms and zeta functions

研究代表者

権 寧魯 (GON, Yasuro)

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：30302508

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：レゾルベント型跡公式と関連する保型形式とゼータ関数について研究を行った。得られた結果に基づき、保型形式の周期から構成されるある種のディリクレ級数について、解析的性質を証明した。そのディリクレ級数の極の位置と留数についても決定した。さらに、 $Sp(2, \mathbb{R})$ 上の大きな離散系列表現に対する、ジーゲル・ウィッター関数の単純で明示的な積分表示を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied resolvent type trace formulas, automorphic forms and zeta functions. Based on our results, we proved analytic properties of certain Dirichlet series constructed from periods of automorphic forms. We also determined the location of poles and residues. Besides, we obtained a simple and explicit integral representation of Siegel-Whittaker functions on  $Sp(2, \mathbb{R})$  for the large discrete series representations.

研究分野：代数学

キーワード：数論 保型形式 跡公式

### 1. 研究開始当初の背景

保型形式の整数論においては、保型L関数の解析的性質や特殊値、保型形式の周期などの意味付けやそれらの相互の関係を調べることは大きな主題のひとつである。セルバーグ跡公式は保型形式やゼータ関数を研究するための強力な道具の一つであり、試験関数を選ぶことによって保型形式の整数論の研究にさまざまな応用がある。扱う群の階数が高い場合、セルバーグ跡公式自身が大変複雑な形をしており、直接には応用しにくい形をしている。現在、さまざまな方向への跡公式の簡易化、一般化が研究されており、保型形式の整数論の研究において重要性が増している。本研究では、このセルバーグ跡公式と本質的に同等な情報を含む「レゾルベント型跡公式」に関する代表者のこれまでの研究を踏まえ、セルバーグ跡公式をより“扱いやすく”さらに、より“多くの情報”を含む「レゾルベント型跡公式」のさらなる“一般化”の研究とそこから必要な情報を取り出す“細分化”の研究を推し進める。加えて、その他の関連する手法(離散群に関連する力学系や連分数の理論等)を取り入れつつ、さらに発展させ、そこから数論的に重要な情報を抽出し、保型形式やゼータ関数および数論的応用の研究を行う。

### 2. 研究の目的

セルバーグ跡公式、レゾルベント型跡公式と関連する保型形式とゼータ関数について研究する。具体的には以下の(1),(2)について、研究を行う。

(1) 代数体の整数環を成分とする階数1の不定値直交群やユニタリ群の跡公式をKタイプ付きで明示的に研究する。次に、それらのKタイプに関する跡公式の“差分”を計算して「セルバーグ跡公式の差分」を求める。特に、代数体の単数群の階数が2や3の場合に具体的に計算する。次に、得られた跡公式から1または2変数のセルバーグ型ゼータ関数を定義し、研究する。

(2) 上で得られた「跡公式の差分」に基づいて、数論的な応用を考察する。例えば、跡公式の差分から得られるセルバーグ型ゼータ関数の解析的性質を用いて、代数体や二次形式の類数の漸近的分布を研究する。また、保型形式の周期の分布と保型L関数の特殊値との関係などを調べる。あわせて、離散群の双曲的固定点から決まる力学系についても考察する。

### 3. 研究の方法

(1) 不定値直交群やユニタリ群複数個の直積に対して、代数体の整数環から決まる離散部分群のセルバーグ跡公式をKタイプ付きで明示的に研究する。跡公式の幾何学的辺に現れる重み付きユニポテント軌道積分のフーリエ変換を計算することが必要である。次にKタイプに関する差分を考察する。さら

に、それらのKタイプに関する跡公式の“差分”を計算して「セルバーグ跡公式の差分」を求める。特に、代数体の単数群の階数が2や3の場合に具体的に計算する。得られた跡公式から1または2変数のセルバーグ型ゼータ関数を定義し、解析的性質や関数等式を研究する。

(2) 階数が2の具体的な群に対して、いくつかのKタイプに対するセルバーグ跡公式の両辺を比較し、跡公式の差分を考察する。具体的には各放物型部分群から誘導された主系列表現のKタイプの分布を調べ、Kタイプを固定した跡公式をいくつか比較してそれらのKタイプに関する差分が出来るだけ簡単になる組み合わせを考察する。結果として、ある階数1の放物型部分群に対する特定のMタイプから誘導される主系列表現のみがスペクトルサイドに現れる跡公式の“細分化”が得られる。上記方法で、フルモジュラーな場合にいくつかのKタイプの組に対して、散乱行列式と放物共役類の寄与の差分を計算する。得られた跡公式の差分を用いて、数論的応用を考察する。

### 4. 研究成果

(1) 代数体をひとつ固定し、その整数環の元を成分とする2次の特殊線形群を考える。代数体の無限素点の個数に応じて、この群は上半平面と3次元上半空間いくつかの直積に不連続に作用する。代数体から決まるこの不連続群に対する(適切な)セルバーグ型ゼータ関数を定義しその解析的性質や数論的応用を研究することは、保型形式の整数論にとって重要な問題と考えられが、不連続群が作用する対称空間の階数が1であるような代数体である有理数体や虚二次体以外ではあまり研究されていなかった。最近の代表者の研究(Y. Gon, J. Number Theory 147 (2015))により、代数体を実二次体の場合には、セルバーグ型ゼータ関数の定義や解析的性質、数論的な応用等が分かってきたので、さらに純三次体の場合の不連続群に対するセルバーグ型ゼータ関数への応用を念頭に、非自明なウェイトを持つセルバーグ跡公式と跡公式の“重さに関する差分”を研究した。得られた跡公式の差分を用いて、一変数のセルバーグ型ゼータ関数を定義し、このゼータ関数の全平面への有理型解析接続、零点と極の位置と位数の決定、関数等式を証明した。関数等式には、通常のガンマ関数、2重ガンマ関数に加えて、アイゼンスタイン級数の定数項からの寄与である“純三次体の基本単数のゼータ関数”が現れる。既に扱った実二次体の時と同様に、素測地線型定理や、ラプラシアン固有値に対するワイル型の漸近公式も証明される。

(2) 階数2の実斜交群上の大きい離散系列表現に対するSiegel-Whittaker関数の明示的積分表示を得た。満たすべき偏微分方程式系や形式的級数表示は今までに知られてい

たが(T. Miyazaki, J. Math. Sci. Univ. Tokyo (2000))、簡明な積分表示を持つ2変数の部分的に合流した超幾何関数いくつかの線形結合として具体的に書くことに成功した。このタイプの合流型超幾何関数は、階数2の他の群の場合でも現れることが期待される。また、線形結合の係数から構成される行列の行列式に著しい規則性が観察され、数論的にも表現論的にも重要であることが示唆される。以上は織田孝幸氏との共同研究の結果を含む。

(3)セルバーグゼータ関数の対数微分の部分的変形について考察した。具体的には、極の位置を動かさず、各極での留数が増えるような「セルバーグゼータ関数の対数微分」の部分的変形の族を考察した。このようなゼータ関数の部分的変形の族は、今まであまり考察されたことはないが、ゼータ関数の零点についての研究において重要であると考えられる。ある条件を満たす保型形式の周期から構成されるディリクレ級数について、全平面への有理型解析接続や極の位置、極での留数をすべて決定した。その結果、今回扱った「保型形式の周期から構成されるディリクレ級数」が「セルバーグゼータ関数の対数微分」の部分的変形の族の一例を与えていることが分かり、大変興味深いといえる。

(4)実二次体のヒルベルトモジュラー群に対するヒルベルトマース形式のなす空間には各変数に対応する二つのラプラシアンが作用する。今回は、第二ラプラシアンの重さが任意の場合に、ある条件を満たすヒルベルトマース形式のなす部分空間を考察し、そこに作用する第一ラプラシアンの固有値から構成されるスペクトルゼータ関数、スペクトルゼータ関数について研究を行った。このようなゼータ関数やスペクトルゼータ関数については、現在まであまり研究されていなかった。先ず、ゼータ関数の時間が0に近づく漸近公式をすべての場合に導出した。これからスペクトルゼータ関数の解析接続や原点での正則性が導かれる。これらの結果を用いて、この空間に作用する第一ラプラシアンの正規化行列式を定義し、その明示公式を求めた。得られた結果は、筆者が過去に定義したヒルベルトモジュラー曲面に対するセルバーグ型ゼータ関数を用いて記述される。この際に現れるすべての定数を決定した。特に、楕円元の寄与から決まる定数を任意の重さに対して決定した。また、重さが高いときはセルバーグ型ゼータ関数が隣接する重さの第二ラプラシアンの正規化行列式の商で表わされることも分かり、大変興味深いと言える。得られた公式の変数を特殊化することによって、いろいろな重さの第二ラプラシアンそのものの正規化行列式が、いくつかの重さのセルバーグ型ゼータ関数の特殊値を組み合わせることによって表示できることも示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Yasuro Gon and Takayuki Oda, An explicit integral representation of Siegel-Whittaker functions on  $Sp(2, \mathbb{R})$  for the large discrete series representations, to appear in Contemporary Math. (2017 or 2018), 19 pages. 掲載決定. doi:未定  
査読有

Yasuro Gon, Dirichlet series constructed from periods of automorphic forms, Math. Zeit. 281(2015), 747--773. doi: 10.1007/s00209-015-1506-8  
査読有

Yasuro Gon, Differences of the Selberg trace formula and Selberg type zeta functions for Hilbert modular surfaces, J. Number Theory 147 (2015), 396--453. doi:10.1016/j.jnt.2014.07.019  
査読有

[学会発表](計7件)

Yasuro Gon, Remarks on gamma factors of Selberg type zeta functions, 研究集会“Zeta functions in OKINAWA 2016”, 沖縄コンベンションセンター, 沖縄県宜野湾市, 2016年10月30日

Yasuro Gon, An explicit integral representation of Siegel-Whittaker functions on  $Sp(2, \mathbb{R})$  for the large discrete series representations, Oberseminar Analysis und Zahlentheorie, Tuebingen University, Germany, 2016年9月6日

Yasuro Gon, Selberg zeta functions for Hilbert modular groups and determinants of restricted Laplacians, Oberseminar Analysis und Zahlentheorie, Tuebingen University, Germany, 2016年8月30日

Yasuro Gon, An explicit integral representation of Siegel-Whittaker functions on  $Sp(2, \mathbb{R})$  for the large discrete series representations, International conference “Geometry, Representation Theory, and Differential Equations”, 九州大学, 2016年2月18日

Yasuro Gon, Partial deformation of Selberg zeta functions, 研究集会“Zeta functions in OKINAWA 2015”, 沖縄コンベンションセンター, 沖縄県宜野湾市, 2015年10月10日

Yasuro Gon, Selberg type zeta functions for  $PSL(2)$  over rings of pure cubic integers, 研究集会“Zeta functions in OKINAWA 2014”,

沖縄コンベンションセンター，沖縄県宜野湾市，2014年10月25日

Yasuro Gon, An explicit integral representation of Siegel-Whittaker functions on  $Sp(2, \mathbb{R})$  for the large discrete series representations, 愛媛大学整数論ミニ研究集会，愛媛大学，2014年8月10日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

権 寧魯 (GON, Yasuro)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：30302508

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

都築 正男 (TSUZUKI, Masao)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：80296946