

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 11 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400018

研究課題名(和文) マンフォード形式の無限積表示と幾何的なゼータ関数の特殊値

研究課題名(英文) Infinite product presentation of the Mumford form and special values of geometric zeta functions

研究代表者

市川 尚志 (ICHIKAWA, Takashi)

佐賀大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：20201923

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：代数曲線の数論的Schottky-Mumford一意化理論を用いて、Chern-Simons不変量の数論性を示した。その結果と数論幾何におけるArakelov理論、古典的Liouville場に関するZograf及びMcintyre-Takhatajanの理論を用いることにより、代数曲線のモジュライ空間上においてChern-Simons直線束を表す、Deligne-Riemann-Roch同型写像の具体的な無限積表示を与えた。その応用として、Schottky群のRuelleゼータ関数の特殊値を周期積分と判別式の積で表し、幾何的なゼータ関数についてもDeligne予想の類似が成り立つことを示した。

研究成果の概要(英文)：By the arithmetic Schottky-Mumford uniformization theory, we proved the arithmeticity of Chern-Simons invariants. Using this result together with the Arakelov theory in arithmetic geometry and the theory of Zograf, McIntyre-Takhatajan on the classical Liouville field theory, we gave an infinite product presentation of the Deligne-Riemann-Roch isomorphism which expresses the Chern-Simons line bundle. As its application, we express the special values of the Ruelle zeta functions of Schottky groups as the products of period integrals and discriminants. This result gives an analog of the Deligne conjecture on such geometric zeta values.

研究分野：数論幾何

キーワード：代数曲線 モジュライ空間 Chern-Simons不変量 Arakelov理論 Deligne-Riemann-Roch同型写像 Schottky群 Ruelleゼータ関数

1. 研究開始当初の背景

本研究に関連する主な動向としては、

- (1) 研究代表者による、種数が3と4の場合における Mumford 形式の Teichmüller モジュラー形式を用いた明示公式
- (2) Zograf, Takhtajan, McinTyre による正則分解公式
- (3) Deligne, Beilinson, Bloch, Kato による、モチーフのゼータ関数の特殊値に関する予想
- (4) Fried, Sugiyama による双曲多様体の Ruelle ゼータ関数の特殊値に関する研究

が挙げられる。

Mumford 形式とは、代数曲線の族に Grothendieck-Riemann-Roch の定理を適用して得られる Mumford 同型を表す Teichmüller 空間上の正則関数であり、数論幾何において代数曲線の判別式を普遍的に表すものであると共に、弦理論における測度としても現れる重要な研究対象である。応募者は今まで、上記(1)のように Mumford 形式の表示として Teichmüller モジュラー形式を用いてきたが、種数が高い場合には、Schottky 問題から生ずる困難のために進展が滞っていた。最近 Zograf, Takhtajan, McinTyre による正則分解公式を用いると、Mumford 形式の無限積表示が得られることが分かったが、正確な結果を得るためには、その表示に現れる比例定数を決定する必要があった。その後の研究により、数論的 Schottky-Mumford 一意化理論を用いて、特別な場合にこの比例定数を決定できること、またそれが Schottky 群に関する Selberg ゼータ関数の特殊値、すなわち Selberg ゼータ値の数論性の研究に応用できることが分かった。

本研究では、今まで得られた結果を完全な形にして、一般の Mumford 形式の無限積表示と Selberg ゼータ値の数論性を示すと共に、Fried や Sugiyama による Selberg の跡公式を用いた Ruelle ゼータ値に関する結果との関連についても考察し、これらの幾何的なゼータ関数の特殊値について、Deligne, Beilinson, Bloch, Kato による予想の類似を研究する。

2. 研究の目的

Mumford 形式は、代数曲線のモジュライ空間上において標準的な直線束の間の Mumford 同型を表す Teichmüller 空間上の正則関数である。本研究では、Mumford 形式の明示公式、特に種数1の場合における Ramanujan のデルタ関数を用いた公式を拡張した無限積表示を与える。またその応用として、幾何的なゼータ関数の特殊値(ゼータ値)に関する数論性を研究し、モチーフのゼ

ータ関数に関する Deligne 等による予想の類似として、Schottky 群の Selberg ゼータ関数の特殊値が、対応する代数曲線の周期積分と判別式などの不変量の積として表されることを示す。

3. 研究の方法

Mumford 形式の無限積表示と、その Selberg ゼータ値の数論性への応用について主に研究する。具体的には、

- (1) 数論的 Schottky-Mumford 一意化と普遍微分形式・周期の理論を用いて、Ramanujan デルタ関数を用いた種数1の Mumford 形式の無限積表示を、一般の種数の場合に拡張する。
- (2) Mumford 形式の無限積表示と Selberg ゼータ関数の類似に着目することにより、Mumford 形式の数論性から、Schottky 群に対する Selberg ゼータ値の数論性を導く。
- (3) Schottky 群に対する Selberg ゼータ値が、対応する代数曲線の周期と判別式の積で表されることを示し、数論的ゼータ関数の特殊値に関する Deligne, Beilinson, Bloch, Kato による予想の類似が、幾何的なゼータ関数の場合でも成り立つことを示す。
- (4) Selberg ゼータ値に関する上記の結果と、Fried, Sugiyama による Ruelle ゼータ値に関する研究を比較、検討することにより、幾何的なゼータ関数の特殊値に関する研究方法を整理する。
- (5) Zograf, Takhtajan, McinTyre による正則分解公式を数論幾何的に解釈することにより、数論的 Riemann-Roch の定理との関連を研究する。

4. 研究成果

- (1) 代数曲線の数論的 Schottky-Mumford 一意化理論を用いて、Chern-Simons 不変量の数論性を示した。その結果と数論幾何における Arakelov 理論、古典的 Liouville 場に関する Zograf 及び Mcintyre-Takhtajan の理論を用いることにより、代数曲線のモジュライ空間上において Chern-Simons 直線束を表す、Deligne-Riemann-Roch 同型写像の具体的な無限積表示を与えた。またその応用として、Schottky 群の Ruelle ゼータ関数の特殊値を周期積分と判別式の積で表し、このような幾何的なゼータ関数についても Deligne 予想の類似が成り立つことを示した。

さらに各研究分担者は次の成果を得た。

- (2) 偏極代数多様体の幾何学的不変式論の意味における安定性と定スカラー曲率 Kähler 計量の存在とが同値になるという予想、い

わゆる「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」を中心に研究した。特に Einstein・Kähler Fano 多様体を底空間とするいくつかの複素直線束達の直和のコンパクト化として得られるトーリック束で、ある種の条件を満たす空間に対し、Kähler-Ricci ソリトンの存在問題を考察し、特別な場合として、底空間の Einstein・Kähler Fano 多様体が等質的であるときに、この予想の証明を与えることができた。

- (3) 三重周期極小曲面の変形族を構成し、対応する Riemann 面を崩壊させたときの振る舞いを研究した。難解な箇所は、単なる変形族を構成するのではなく、Riemann 面を崩壊させる段階まで三重周期極小曲面であることを保つような変形族を構成しなければならないことである。今回、4 助変数によって定められる超楕円型 Riemann 面を設定して、その Abel-Jacobi 写像の実部を利用し、三重周期極小曲面の 2 助変数による変形族を構成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

{ 雑誌論文 } (計 8 件)

(1) Norio Ejiri and Toshihiro Shoda, On hyperelliptic minimal surfaces with even genus, Current developments in differential geometry and its related fields, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 査読有 p.129-138 (2016)

(2) Shoichi Fujimori and Toshihiro Shoda, Minimal surfaces with two ends which have the least total absolute curvature, Pacific J. Math. 査読有 282, p.107-144 (2016)

(3) Takashi Ichikawa, Algebraic and rigid geometry on the Schottky problem, J. Reine Angew. Math. 査読有 705, p.23-33 (2015)

(4) Yasuhiro Nakagawa, On the examples of Nill and Paffenholz, Int. J. Math. 26, p.1540007-1 - 1540007-15 (2015), DOI: 10.1142/S0129167X15400078

(5) Norio Ejiri, Shoichi Fujimori and Toshihiro Shoda, A remark on limits of triply periodic minimal surfaces of genus 3, Topology Appl. 査読有 196, p.880-903 (2015)

(6) Takashi Ichikawa, Vector-valued p -adic Siegel modular forms, J. Reine

Angew. Math. 査読有 690, p.35-49 (2014)

(7) Norio Ejiri and Toshihiro Shoda, On a moduli theory of minimal surfaces, Prospects of differential geometry and its related fields, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 査読有 p.155-172 (2014)

(8) Shoichi Fujimori and Toshihiro Shoda, A family of complete minimal surfaces of finite total curvature with two ends, Differential geometry of submanifolds and its related topics, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 査読有 p.19-31 (2014)

{ 学会発表 } (計 5 件)

(1) Toshihiro Shoda, Abel-Jacobi 写像による極小曲面の変形族の構成について, 名城大学研究集会「多様体上の計量と幾何構造」2017年3月1日, 名城大学

(2) Yasuhiro Nakagawa, On the existence problems for Kähler-Ricci solitons on certain toric bundles, The 22nd Symposium on Complex Geometry, 2016年11月1日, 金沢県政記念 しいのき迎賓館

(3) Takashi Ichikawa, Algebraic theory of nearly holomorphic modular forms, RIMS Workshop “Automorphic Forms, Automorphic L -functions and Related Topics” 2016年2月2日, RIMS

(4) Takashi Ichikawa, Riemann-Roch isomorphisms on the moduli spaces of curves, Workshop on “Moduli spaces of abelian varieties and curves, and related analysis” 2015年12月15日, University of Tokyo

(5) Takashi Ichikawa, Riemann-Roch isomorphisms as in_nite products Workshop on “Bundles over Surfaces and Eisenstein Periods for Loop Groups” 2014年7月1日, Kyushu University

{ 図書 } (計 0 件)

{ 産業財産権 }

出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :

国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://research.dl.saga-u.ac.jp/profile/ja.1b567f5ab7f8b17e59c123490551be02.html>

6．研究組織

(1) 研究代表者

市川 尚志 (ICHIKAWA, Takashi)
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号：20201923

(2) 研究分担者

中川 泰宏 (NAKAGAWA, Yasuhiro)
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号：90250662

(3) 研究分担者

庄田 敏宏 (SHODA, Toshihiro)
佐賀大学・教育学部・准教授
研究者番号：10432957