

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 26 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400021

研究課題名(和文)ゼータ関数・テータ関数の多重母関数 その定式化と挙動解明

研究課題名(英文)Multiple hypergeometric type generating functions for the values of Lerch zeta-functions--their formulation and analytic behaviour--

研究代表者

桂田 昌紀 (KATSURADA, Masanori)

慶應義塾大学・経済学部(日吉)・教授

研究者番号：90224485

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：Lerch ゼータ関数の値列を係数に含む多変数超幾何型母関数に関しては，Lauricella の A 型多重超幾何関数に付随した形の母関数の定式化がほぼ満足できる形に達成された．本研究代表者はこの母関数に関して，複素  $s$  変数が適切な相互 order 条件を満たしつつ多重扇状領域内を  $0$  に収束するとき，及び  $s \rightarrow \infty$  に発散するとき，それぞれの case について，完全漸近展開を導出することに成功しており，この成果からは母関数の高階導関数に対して，変数  $s$  が整数点にあるときの完全漸近展開や， $s$  が非負の整数点のある場合には closed form の表示も得られる．

研究成果の概要(英文)：As for the multiple hypergeometric type generating functions for the values of Lerch zeta-functions, the head investigator has succeeded in formulating the expected generating functions (of several complex variables) for the values of Lerch zeta-functions, in the form of Lauricella (type A) multiple hypergeometric series. The major achievements of the present research include complete asymptotic expansions for these multiple generating functions when the variables  $(z_1, \dots, z_n)$  tend to  $0$  and to  $\infty$ , while suitable mutual order conditions on  $s_j$ 's are imposed, through an appropriate poly-sector. These asymptotic expansions further yield: 1) asymptotics for higher derivatives of the generating functions when the variable  $s$  is at any integer point; 2) closed form evaluation of the generating functions when  $s$  is at any non-positive integer point; 3) asymptotics for two variable analogues of the classical trigonometric sums treated in [Hardy-Littlewood (1936)].

研究分野：解析的整数論

キーワード：generating function zeta-function

### 1. 研究開始当初の背景

本研究代表者は、1996年～2000年頃にかけての研究で、Riemann ゼータ関数の値列を係数に含む(1変数)超幾何型母関数を定式化し、その Euler 型積分表示、Mellin-Barnes 型積分表示等の解析的性質を見出した。このゼータ関数の値列の超幾何型母関数は、ゼータ関数由来の変数  $s$ 、及び超幾何関数由来の変数  $z$  を同時に有しているが、上述の解析的性質を用いることで、この超幾何型母関数に対して、特に変数  $z$  が扇状領域  $|\arg z| < \pi$  内を、 $z \rightarrow 0$  となる時、及び  $z \rightarrow \infty$  となる時、それぞれの場合における完全漸近展開を確立した。この結果からは、変数  $s$  が整数点にあるときの母関数の特殊値の closed form の明示式等、種々の新知見が得られた。

この研究の方向性では以降、 $z$  が1変数という状況の下で、後継の研究が様々な aspect において実行されたものの、本研究開始時点では、1変数  $z$  を多変数化し、多重超幾何関数との関連でゼータ関数の母関数を捉えるという視点は存在していなかった。

### 2. 研究の目的

本研究では、項目1. に述べた問題意識において、差し当たりは、Riemann ゼータ関数や Hurwitz ゼータ関数等、典型的なゼータ関数とその特殊な場合として含む Lerch ゼータ関数に対して、その値列を係数に含む多変数超幾何関数型母関数の広範なクラスを定式化し、先ず、1変数の場合と同様な Euler 型積分表示や Mellin-Barnes 型積分表示を多変数の場合に確立し、それを用いて、超幾何型母関数の漸近的挙動を解析することが第一の step となる。

次いで、値列を生成するゼータ関数を正則・非正則 Eisenstein 級数等、主に2重級数で定義されるゼータ関数のクラスに拡大し、同様の問題意識において解明を進める。

更には、値列を生成する関数がテータ関数である場合にも、適切な多変数超幾何型母関数のクラスを定式化する可能性を探るとともに、定式化が実現した場合には、ゼータ関数・テータ関数それぞれの多変数超幾何型母関数の相互連関への洞察を醸成することを目指す。

### 3. 研究の方法

項目2. に述べた Lerch ゼータ関数の値列を係数に含む多変数超幾何型母関数の定式化においては、本研究代表者が以前、多変数 Shintani ゼータ関数の挙動解明に際して発見した、Lauricella (A型) 多重超幾何関数を積分核に含む新種の Mellin-Barnes 型積分が極めて有効である。実際、上述の多変数超幾何型母関数は、複素  $n$  次元の変数を持つ Lauricella (A型) 多重超幾何関数及び、異なるパラメータを持つ2つの Lerch ゼータ関数の積を被積分関数に含む

Mellin-Barnes 型積分表示を持ち、この積分表示の複素平面内の鉛直方向積分路を左右に移動して被積分関数の極からの留数を拾い上げることで、極めて自然な形に、変数  $(z_1, \dots, z_n)$  が相互に適切な order を保ちつつ多重扇状領域内を  $0$  に収束するとき、及び  $\infty$  に発散するとき、それぞれの case の完全漸近展開を導出することが出来る。

以上の手法を研究展開における指導原理として、Eisenstein 級数やテータ関数の値列を係数に含む多変数超幾何型母関数の定式化や挙動の解明を行う。

### 4. 研究成果

項目2. に述べた Lerch ゼータ関数の値列を係数に含む多変数超幾何型母関数に関しては、Lauricella の A型多重超幾何関数に付随のする母関数の定式化はほぼ満足できる形に実現している。本研究代表者はこの母関数に関して、項目3で述べたパラメータが適切な多重扇状領域内を  $0$  に収束するとき、及び  $\infty$  に発散するとき、それぞれの case について、完全漸近展開を導出することに成功しており、この成果からは、母関数の高階導関数に対して、変数  $s$  が整数点にあるときの完全漸近展開や、 $s$  が非負の整数点にあるときには closed form の表示式も得られる。更にはこの成果を、応用することで、[Hardy-Littlewood (1936)] において導入・研究されたある種の三角級数の自然な2変数版の定式化も可能となり、その漸近的挙動や特殊値についても究明が進みつつある。

次に、Eisenstein 級数の値列を係数に含む母関数については、その解明に先立って、現状では Eisenstein 級数自体の漸近的挙動の究明や2変数化の方向への研究が十分に進んでいないという事情に鑑み、これに密接に関連するテーマとして、複素2変数2重正則 Eisenstein 級数の完全漸近展開を導出した。今後は、ここで得られた完全漸近展開式を clue として、Eisenstein 級数の値列に付随した多変数超幾何型母関数の定式化を目指したいと考えている。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① Masanori KATSURADA and Takumi NODA, Transformation formulae and asymptotic expansions for double holomorphic Eisenstein series of two complex variables, The Ramanujan Journal, 掲載決定 (査読有).  
<DOI: 10.1007/s11139-017-9922-5.>
- ② Masanori KATSURADA, Shintani zeta-functions of several variables associated with the Lerch zeta-function, in R. I. M. S.

- K $\{\hat{y}^o\}$ ky $\{\hat{y}^u\}$ roku,” 掲載決定 (査読無).
- ③ Masanori KATSURADA, Asymptotic expansions for the Laplace-Mellin and Riemann-Liouville transforms of Lerch zeta-functions, in ``R. I. M. S. K $\{\hat{y}^o\}$ ky $\{\hat{y}^u\}$ roku,” No. 2014, pp. 35-47, 2017 (査読無).  
<<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2014-04.pdf>>
- ④ Masaaki AMOU and Keijo V $\{\hat{y}^r\}$  A $\{\hat{y}^n\}$  A $\{\hat{y}^r\}$  A $\{\hat{y}^n\}$  NEN, On algebraic independence of a class of infinite products, Journal of Number Theory 172 (2017), 114-132 (査読有).  
<DOI:org/10.1016/j.jnt.2016.08.007>
- ⑤ Masanori KATSURADA and Takumi NODA, Transformation formulae and asymptotic expansions for double holomorphic Eisenstein series of two complex variables (summarized version), in ``R. I. M. S. K $\{\hat{y}^o\}$ ky $\{\hat{y}^u\}$ roku,” No. 2013, pp. 157-169, 2016 (査読無).  
<<http://kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2013-18.pdf>>
- ⑥ Takumi NODA, On the functional properties of the confluent hypergeometric function, The Ramanujan Journal 41 (2016), 183-190 (査読有).  
<DOI: 10.1007/s11139-014-9613-4>
- ⑦ Masanori KATSURADA, Complete asymptotic expansions associated with Epstein zeta-functions II, The Ramanujan Journal 36 (2015), 403-437 (査読有).  
<DOI: 10.1007/s11139-014-9583-6>
- ⑧ Takumi NODA, On the functional properties of the Bessel zeta-function, Acta Arithmetica, 171 (2015), 1-13 (査読有).  
<DOI: 10.4064/aa171-1-1>
- ⑨ Masaaki AMOU and Keijo V $\{\hat{y}^r\}$  A $\{\hat{y}^n\}$  A $\{\hat{y}^r\}$  A $\{\hat{y}^n\}$  NEN, Arithmetical properties of certain infinite products, Journal of Number Theory 153 (2015), 283-303 (査読有).
- ⑩ Masanori KATSURADA, Asymptotic expansions for certain  $\$q\$$ -series,  $\$q\$$ -integrals,  $\$q\$$ -differentials and a formula of Ramanujan for specific values of  $\$Yzeta(s)\$, in ``K $\{\hat{y}^o\}$ ky $\{\hat{y}^u\}$ roku,” R. I. M. S., No. 1898, pp. 156-173, 2014 (査読無).  
<<http://kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1898-15.pdf>>$

[学会発表] (計 6 件)

- ① Takumi NODA, Special values of some generating functions of the Riemann zeta function, Diophantine Analysis and Related Fields 2017, January 8, 2017, College of Science and Technology, Nihon University, Tokyo, Japan.
- ② Takumi NODA, Two zeta functions contained in the Poincaré series, November 2, 2016, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, Japan.
- ③ Masanori KATSURADA, Asymptotic expansions for the Lerch zeta-function transformed by the Laplace-Mellin and Riemann-Liouville operators with their convolutions, October 31, 2016, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, Japan.
- ④ Masanori KATSURADA, Asymptotic expansions for the Laplace-Mellin and Riemann-Liouville transforms of Lerch zeta-functions, Diophantine Analysis and Related Fields 2015, March 6, 2015, Kiryu City Performing Arts Center, Kiryu, Japan.
- ⑤ Takumi NODA, Confluent hypergeometric type Ramanujan's formulas, Diophantine Analysis and Related Fields 2015, March 5, 2015, Kiryu City Performing Arts Center, Kiryu, Japan.
- ⑥ Masanori KATSURADA and Takumi NODA, Transformation formulae and for the Laplace asymptotic expansions for double holomorphic Eisenstein series of two complex variables, October 31, 2014, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto, Japan.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：

種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

桂田 昌紀 (KATSURADA, Masanori)  
慶應義塾大学・経済学部・教授  
研究者番号：90224485

### (2) 研究分担者

野田 工 (NODA, Takumi)  
日本大学・工学部・教授  
研究者番号：10350034

### (3) 研究分担者

天羽 雅昭 (AMOU, Masaaki)  
群馬大学・大学院理工学府・教授  
研究者番号：60201901