

令和元年6月3日現在

機関番号：32615  
 研究種目：基盤研究(C) (一般)  
 研究期間：2014～2018  
 課題番号：26400022  
 研究課題名(和文) Completely Regular Clique Graph の研究

研究課題名(英文) On Completely Regular Clique Graphs

研究代表者

鈴木 寛 (Suzuki, Hiroshi)

国際基督教大学・教養学部・教授

研究者番号：10135767

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：Completely Regular Clique Graph (CRCG) の構造を持つ距離正則グラフ (DRG) として、古典的な幾何に属するグラフのうち、Thin Condition を満たすものを特徴付けることを当初の目的とした。

1. CRCG の構造がより明らかとなり、直径が大きく既知の DRG が CRCG の構造を持つか否かを、しらべる一般的な方法を得、Thin Condition を満たさないものも含め、CRCG の構造をほぼ決定することができた。
2. 付随する DSRG の閉路の集合  $C$  を持ち上げることができる、 $C$ -普遍被覆の存在と、その有限性の条件を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

距離正則グラフ (DRG) のように、正則性の高いグラフにおいて、特定の、閉路の集合  $C$  を持ち上げることで、 $C$ -普遍被覆を考えることが有効であること。特に、CRCG の構造を持っている場合には、付随する DSRG の、最短閉路の集合を  $C$  とし、その  $C$ -普遍被覆を考えることが本質的な意味を持つことを示し、DRG の研究に新しい視点を与えることができた。

DRG の中でも、Classical Parameter を持つものについては、ある意味で、それ自身が、普遍被覆となっていることから、 $C$ -単連結という性質で特徴づけ、分類へと向かい得る可能性を示すことができた。

研究成果の概要(英文)：The original aim was to characterize classical distance-regular completely regular clique graphs satisfying the thin condition.

1. We clarified the structure of distance-regular completely regular clique graphs and established a way to determine whether the known distance-regular graphs with large diameter to have structures of completely regular clique graphs. It enabled us to determine completely regular clique graph structures, i.e., the choices of  $C$ , of all known families of distance-regular graphs with unbounded diameter.
2. We studied the universal  $C$ -cover of the associated distance-semiregular graphs and gave a finiteness condition of the universal  $C$ -cover when  $C$  is the collection of closed circuits of minimal length.

研究分野：代数的グラフ理論

キーワード：Distance-Regular Graph DSRG Association Scheme Algebraic Graph Theory Algebraic Combinatorics

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

古典的な幾何に属する距離正則グラフ(DRG)の主要なクラスが、Completely Regular Clique Graph (CRCG) の構造を持つこと、多くの研究者が扱っている Geometric Distance-Regular Graph よりも、自然で、かつより広い範囲の、DRG を捕らえられることは、研究開始前にすでに、理解できていた。しかし、一つの、DRG がいくつかの CRCG の構造を持つことをどう理解したら良いのかは不明であった。また、CRCG の構造を持つ DRG には、Distance-Semiregular Graph が付随することは、知られていたが、そのことをどのように利用して発展させるかについては、アイデアがなかった。さらに、CRCG の中のどのようなクラスに最初に注目すべきかわからず、それまで研究していた、Terwilliger Algebra の構造が簡単な場合として、Thin な CRCGs を研究することとした。古典的な幾何に付随する、DRG で Thin Condition を満たすものは、すべて CRCG であることを、確認していたことも研究の背景として重要である。

### 2. 研究の目的

CRCG の構造を持つ、DRG として、古典的な幾何に付随し、Thin Condition を満たすものを特徴づけることを目的とした。DRG が CRCG の構造を持つと、ある正則性を満たす points-lines に関する幾何が付随し、さらに、その Terwilliger Algebra の加群の性質である Thin Condition を満たすと、より高度の正則性を持つことが期待できる。Thin Condition は、Symmetric な自己同型をもつグラフの代数的一般化でもあり、多くの分野と関連し、豊かな内容を持つ。

### 3. 研究の方法

CRCG の構造をもつ DRG または付随する DSRG が、Thin Condition を満たす時に、どのような強い正則性を満たすかを調べる。また、知られている、DRG のうちで、CRCG の構造を持つもの、複数持つもの、持たないものについて、調べる。

さらに、CRCG は DRG かという基本的な問題についても、考えながら、CRCG の理解を深めること。

これに加えて、points-lines に関する幾何の性質による特徴付について、有限幾何を専門とする研究者からアドバイスを得ること。

代数的な手法、特に、Terwilliger Algebra の表現がどの程度利用できるかを、Terwilliger Algebra の表現を専門としている研究者と議論しながら、開発することを目指した。

### 4. 研究成果

第一に、すでに概要を得ており、投稿中の論文 [発表論文 1] を査読付き専門誌に発表するとともに、進展中の結果をまとめて、CRCG の Thin Condition と、DSRG の Thin Condition の関係などを明らかにした論文 [発表論文 2] を投稿し、発表した。

第二に、直径が大きい、知られている DRG が CRCG の構造を持つかどうかを一つずつ調べた。一つには、Thin Condition を満たさない DRG の場合にも、CRCG となることがあることに気づいたからである。さらに、CRCG の構造を 2 つ以上、特に、異なるサイズの Clique について CRCG となる場合について、これまでに得られていた結果の証明と似た方法で、異なるサイズの Clique について CRCG となっても、その種類はたかだか 2 であるという強い結果を得ることができ、すべての、知られている直径の大きな DRG について、CRCG の構造を持つかどうかを調べることが可能であろうと見当がついた。

さらに、過去に、二部グラフの距離 2 グラフとして得られる、知られている直径の大きな DRG の研究がかなり利用できることが、わかってきたことも、この研究を進める原動力となった。直径の大きな知られた DRG のすべてを十分理解することにも繋がり、時間はかかったが、収穫は大きかった。その結果をまとめたものが [発表論文 3] である。雑誌上で 36 ページの大論文である。

この結果により、いままで知られていなかった、DSRG もいくつか提示することができた。同じサイズであっても、その一部を利用して、CRCG が作れるかどうかは、簡単な問題ではない。この部分は、いくつかのグラフについて残っている問題である。

なお、[発表論文 3] は、2016 年にほぼ作成し、書き直しなどをしながら、2017 年に投稿、2017 年中に、online で公開となったが、出版されたのは、記載通り、2018 年であったことを付け加えておく。

第三に、以前から興味を持っていた、普遍被覆の理解が、決定的に進展した。幾何の分類を考える時に、より普遍的な普遍被覆空間を考えることは、古典的な手法である。しかし、グラフの場合に、局所的な性質をどのようなものとして捕らえ、何を保持した被覆を考えればよいか、わからなかった。単純に、普遍被覆を考えると、すべて Tree になってしまい、構造を失うからである。C. Chevalley の “Theory of Lie Groups” で局所構造をどう捕らえ、どう持ち上げをするかを学んだあとで、E. E. Shult の “Points and Lines” で C-被覆の概念を学び、それが、CRCG または、それに付随する DSRG の短いまたは Girth に対応する閉路をとりそれが持ち上げられるという条件で、普遍被覆を考えると、望んでいるものが得られることがわかった。この閉路の集合を  $C$  としたとき、C-普遍被覆と呼ぶ。

特に、Girthに対応する、最短閉路の集合を  $C$  として、その  $C$  について  $C$ -普遍被覆を考える  
と、殆どの場合、その  $C$ -普遍被覆が有限なグラフとして得られることを示すことができた。  
これに加え、この方面の様々な文献とのつながりも発見することができ、特に、 $Q$ -多項式とい  
う性質を満たす、古典的なパラメータをもつクラスに関しては、基本群も、長さが、6以下の  
閉路で制御されていることがわかった。次のステップへの大きな成果である。

方向性も明確になってきたことから、まず、ここまでの結果をまとめることをはじめた。

$C$ -普遍被覆の理論は、有限幾何の研究者の一部には知られていることであるが、上記、  
E.E.Shult の本の証明も重要な部分で誤っており、発表されている文献も少ないことから、 $C$ -  
普遍被覆の存在定理も、含めることとした。

小さなグラフに関しては、手計算でも  $C$ -普遍被覆を求めることは可能であるが、ある程度の  
サイズになると、コンピュータも必要であることから、知られている DRG について一つ一つ、  
 $C$ -普遍被覆を決定することは、次のプロジェクトとして残すこととした。

その代わりに、基本的ないくつかのシリーズの  $C$ -普遍被覆をもとめるところまでで、区切り  
をつけることとした。

すなわち、 $C$ -被覆に関する一般論と、 $C$ -単連結の判定条件、いくつかの古典的なグラフに関す  
る、 $C$ -単連結性の証明と、一般の DSRG において、その  $C$ -普遍被覆が有限であることの証明と、  
問題リストである。それを、まとめたものが、[発表論文 4]である。

$C$ -普遍被覆を求めたり、あるグラフが単連結であるかを判定したりするときには、そのグラフ  
が、二部グラフであるかどうか、重要である。その意味でも、CRCG の構造をもつ DRG の場合  
は、付随する DSRG の普遍被覆を考察することができるため、CRCG の構造をもつことは、非常  
に有効である。CRCG の構造をもつこと、または、DSRG が付随するという条件をどのように有効  
に利用できるかが不明であったが、それが少なくとも、この問題においては、有効である。

上記のことから、この研究は、2018 年度が最終年度であったが、これまでの成果を踏まえ、  
あらたな発展のために、最終年度申請を行った。

2018 年 4 月にあらたな研究「単連結距離正則グラフの研究」(2018 年度 基盤研究(C)課題番  
号 18K03222)として採択された。

なお、[発表論文 4]は、2017 年度中に投稿、修正の後、2018 年に掲載されている。

新たな、研究の目的が、本研究の一番の成果だと考えるので、簡略に以下に記す。

「単連結距離正則グラフの研究」の目的：

以下の問題を解決することである。

を距離正則グラフ(DRG)とする。

A.  $(g, x, 6) = (g, x)$  である直径の大きな DRG で、任意の距離 3 の二点  $x, y$  に  
ついて、直径が 3 の、Classical DRG で、これらを含み、geodetically closed であるも  
のが存在すれば、 $(g, x, 6) = (g, x)$  は、Classical DRG である。

B. Geometric Girth が 7 以上で、直径の大きな DRG は存在しない。

今後の、距離正則グラフの研究、特に、古典的パラメータをもつ距離正則グラフの研究を大き  
く推進させる起点を与えたものと考えている。

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 4 件)

1 H. Suzuki, Completely Regular Clique Graphs, Journal of Algebraic Combinatorics, 40  
(2014), 233-244.

DOI: 10.1007/s10801-013-0485-2.

[査読あり]

2 H. Suzuki, Completely Regular Clique Graphs, II, Journal of Algebraic Combinatorics,  
43 (2016), 417-445.

DOI: 10.1007/s10801-015-0639-5.

[査読あり]

3 H. Suzuki, Distance-Regular Graphs of Large Diameter That Are Completely Regular  
Clique Graphs, J. Algebraic Combinatorics, 48 (2018), 369-404.

DOI: 10.1007/s10801-017-0808-9.

[査読あり]

4 H. Suzuki, Coverings and Homotopy of a Graph, Discrete Mathematics, 341 (2018),  
1994-2010.

DOI: 10.1016/j.disc.2018.03.028.

[査読あり]

[学会発表](計 6 件)

- 1 鈴木寛, Completely Regular Clique Graphs, 第33回代数的組合せ論シンポジウム, ピアサ淡海, 2016年6月23日. (報告集あり)
- 2 鈴木寛, Completely regular clique graphs with thick lines, 第28回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2016年7月29日. (報告集あり)
- 3 H. Suzuki, t-Designs Over a Finite Field, International Workshop on Algebraic Combinatorics, Anhui University, China, October 31, 2016.
- 4 鈴木寛, 距離正則グラフの幾何, 小山工業高等専門学校数学談話会, 小山高等専門学校, 2017年1月27日.
- 5 H. Suzuki, Lecture 1: Geometries of Distance-Regular Graphs, Lecture 2: Coverings and Homotopy of a Graph, Mini Symposium on Algebraic Combinatorics, De La Salle University, Philippines, March 14 and 15, 2017.
- 6 鈴木寛, Coverings and Homotopy of a Graph, 第34回代数的組合せ論シンポジウム, 小山商工会議所会館, 2017年6月16日. (報告集あり)

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年:  
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名:

研究者番号(8桁):

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名:

ローマ字氏名:

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。