

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 5 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400024

研究課題名(和文)有限群スキームと正規基底問題

研究課題名(英文)Finite Group Schemes and Normal Basis Problem

研究代表者

諏訪 紀幸 (Suwa, Noriyuki)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：10196925

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主な目的は、代数学の基本事項であるGalois理論では重要な問題である逆Galois問題を正規基底の存在問題と絡めて、群スキームの理論の枠組みで考察することであった。最も基本的な場合である巡回群に対しては、一般の環の上でalgebraic torusに対するKummer理論について詳しい結果を得た。また、素数位数の巡回群に対して、整数環の上でalgebraic torusに対するKummer理論とArtin-Schreier理論を統一する理論を構成した。

研究成果の概要(英文)：It is a main purpose of our research to study the inverse Galois problem, which is one of the most important in the Galois theory.

We discuss the inverse Galois problem with normal basis, concerning Kummer theories for algebraic tori not only over a field but also over a ring, in the framework of group schemes. The unit group scheme of a group algebra plays an important role in this article, as was pointed out by Serre <Groupes algebriques et corps de classes>. We also formulate the notion of cleft extensions in the Hopf-Galois theory in the framework of algebraic geometry. The unit group scheme of the algebra of a finite flat group scheme plays a key role.

研究分野：数学

キーワード：Kummer理論 group scheme algebraic torus torsor Hopf代数 Hopf-Galois理論

1. 研究開始当初の背景

本研究は平成 23 年度から 25 年度まで基盤研究(C) 研究課題「クンマー理論を巡って、群スキームの観点から」(課題番号 23540027)の下で遂行された研究の続編である。初めに、先行する研究と共通する全体的な構想について説明する。

K を体, G を有限群とする。このとき, G を Galois 群にもつ K の Galois 拡大が存在するか, 存在するならば具体的な構成法を記述せよという問題は逆 Galois 問題とよばれ, 今日でも非常に重要な問題である。Kummer 理論や Artin-Schreier-Witt 理論は, 巡回群を Galois 群にもつ Galois 拡大の簡潔な記述を与えている。

Kummer 理論や Artin-Schreier-Witt 理論は Galois 理論の基本的な項目であり, 特に Kummer 理論は Lagrange の分解式を用いた初等的な証明が知られている。おそらくそこに想を得たのであろう, Serre は半世紀前に, Groupes algebriques et corps de classes において次のような議論を展開した。

G を有限群, K を体とする。このとき, 群環 $K[G]$ の可逆な元のなす乗法群 $U(G)$ は K の上の代数群の構造をもつ。さらに, 体の Galois 拡大に対する正規基底定理から, 標準的な全射 $U(G) \rightarrow U(G)/G$ は G を Galois 群にもつ K の Galois 拡大の versal family であることが従う。

奇妙なことに逆 Galois 群の研究では Serre の議論が等閑視されて来たようであるが, 諏訪は Serre の議論を一般の環の上に一般化した。その中で, Serre が $U(G) \rightarrow U(G)/G$ を削って Kummer 理論や Artin-Schreier-Witt 理論を導き出した手法を sculpture problem として定式化し, それに正規底の versal family の存在を問う embedding problem を付け加えて, 議論を整備した ([11][13])。

Serre の議論を一般の finite flat group scheme に定式化することは興味深い問題であろう。しかし, Hopf 代数を環論の枠組みの中で研究する学派が Hopf-Galois 拡大の理論を展開し, その中で cleft 拡大の概念が古典的な Galois 理論における正規底をもつ Galois 拡大の一般化として重要な研究課題であることを, 筑波大学の増岡彰教授からご教示いただいた。

2. 研究の目的

本研究では, (1) 全射 $U(G) \rightarrow U(G)/G$ の解析を一般の環, 特に整数環の上で進める, (2) 一般の finite flat group scheme に対して Serre の議論を定式化する, この二つが大きな目的であった。

(1) に関しては, group scheme $U(G)$ の構造は, G が巡回群である場合でさえ, 体の上での考察に比べて整数環の上での考察ははるかに晦渋である。研究課題「クンマー理論を巡って、群スキームの観点から」で得られた結果にさらに実例を加える。

また, (2) に関しては Hopf-Galois 理論において重要な概念である cleft 拡大を代数幾何学の枠組みで定式化する。

3. 研究の方法

基本的には「クンマー理論を巡って、群スキームの観点から」から研究手法は一貫している。扱っている対象からすれば当然であるが, 一般の環の上の group scheme の様々な先行結果, 例えば Demazure, Gabriel 共著の浩瀚なモノグラフ Groupes Algebriques で論述されている基本事項は不可欠の道具立てであった。

さらに, generic fiber が乗法型, special fiber が unipotent であるような離散付値環の上の commutative group scheme を扱う必要もあるが, これについては, Kummer 理論と Artin-Schreier-Witt 理論を統合する理論に関する, 関口力教授と諏訪が共同で進めて来た共同研究での様々な結果が重要な道具立てを提供した。関口教授と諏訪の共同研究の先行するものとして, Waterhouse と Weisfeiler による離散付値環の上の group scheme の研究は重要であり, 本研究にも影響を及ぼしている。

また, 竹内光弘, 土井洋, 増岡彰に代表される Hopf 代数の学派による Hopf-Galois 拡大の研究においては, 専ら体の上で議論しているが, 環として非可換である Hopf 代数まで扱っている。したがって, その手法を直接取り入れることはできないが, 概念構成の発想を学ぶことは出来た。

4. 研究成果

(1) 論文[14]の過半の結果は研究課題「クンマー理論を巡って、群スキームの観点から」において得ていたが, 本研究の一環としてさらに考察を進め, 公表に至った。

G が巡回群の場合, Kummer 理論や Artin-Schreier 理論, Kummer-Artin-Schreier 理論, さらに, quadratic-twist Kummer 理論, quadratic-twist Kummer-Artin-Schreier 理論については, 論文[11]において徹底的に議論していた。また, Artin-Schreier-Witt 理論については, 論文[13]において徹底的に議論していた。

さて, 論文[14]では東京理科大学の木田将成教授が研究の基礎を築いた algebraic torus に対する Kummer 理論について, 就中, norm torus に対する Kummer 理論([5])と Weil restriction に対する Kummer 理論([6])について, 正規底の存在問題を絡めて, 考察を進めた。一つの成果として, norm torus に対する Kummer 理論と Weil restriction に対する Kummer 理論との差異が, 木田教授の研究ではあまりはっきりとはしていなかったが, 正規底の存在問題を通して明確になったことが挙げられよう。体の Galois 拡大に対して正規底が存在することは古典的な結果であるので, 正規底の存在問題は一般の環の上で議

論して初めて意味を持つ。木田教授による algebraic torus に対する Kummer 理論は体の上に限定して考察されており，ここで一般の環の上で議論した効用の一つが認められよう。また，木田教授による先行研究を isogeny problem として捉え直し，議論を大幅に簡略にすることが出来た。

論文[14]の内容の一部は察して研究課題「クンマー理論を巡って，群スキームの観点から」の下でも，日本における研究集会で講演し，さらに，邦文での論説を書いていた。それに結果を加え整理して，学術雑誌に投稿したのであるが，丁寧に査読していただき，推敲をさらに進めることが出来たのは幸運であった。

さらに，本研究期間中に木田氏が norm torus や Weil restriction に対する Kummer 理論を一般化して，relative norm torus に対する Kummer 理論として考察を進めておられることを知る機会があった。relative norm torus に対する Kummer 理論も，諏訪による定式化ではより簡潔になり，さらに(Q)型の algebraic torus に対する Kummer 理論を考えることによって本質が明らかになることに気付いた。概略は昨年10月に大分大学で開催された大分整数論研究集会において発表した。経緯から木田氏との共同研究の形で発表することにした。ただ，見解の相違があって，順調に共同研究が進んでいるとは言い難いが，論文としてまとめるべく推敲を進めているところである。

(2) 一般の finite flat group scheme に対して Serre の議論を定式化することについて，研究課題「クンマー理論を巡って，群スキームの観点から」の下で Group algebras and normal basis problem との題名で論文にまとめ，中央大学リポジトリのウェブサイトで公開した。その後，学術雑誌に投稿し，論文[15]として公表されるに至った。

Serre の議論では有限群 G の群環の可逆な元のなす乗法群を代数群あるいは group scheme として考えるのが議論の鍵であったが，A. Alvarez, C. Sancho, P. Sancho の共著論文[1]で group scheme に対して群環の相当する ring scheme が構成されていて，それをういれば，一般の finite flat group scheme G に対して group scheme $U(G)$ が定義されることが分かった。 G が有限群の場合， $U(G)$ は元々の $U(G)$ と一致する。さらに，自然な全射 $U(G) \rightarrow U(G)/G$ は group scheme G に対する cleft Hopf-Galois 拡大の versal family であることも示した。 G が有限群である場合，group scheme G に対する cleft Hopf-Galois 拡大は G を Galois 群とする正規底をもつ Galois 拡大に他ならない。したがって，[15]では Serre の議論の自然な一般化を得たと言える。

この結果を増岡彰教授に知らせたところ，Hopf-Galois 理論における研究動向を教えて

いただいた。そこで幾つかの文献に目を通したところ，竹内充弘教授が論文[16]において，体の上ではあるが非可換な Hopf 代数の場合も含めて， $U(G)$ に相当する Hopf 代数を構成していたことが分かった。逆に言えば，Hopf 代数が可換な場合に限るとしても，[15]は竹内教授の研究の代数幾何的な解釈を与えていることになる。

幸いなことに査読者に恵まれ，記述をより明晰にすることが出来た。

この研究については，昨年9月につくば国際センターで開催された国際研究集会「Hopf Algebras Conference in Tsukuba」で総合報告を講演する機会を得た。

(3) 諏訪は研究課題「クンマー理論を巡って，群スキームの観点から」における研究の主要な結果の一つとして，「標数 $p > 0$ の環の不分岐 p^n 次巡回拡大は正規底をもつ」ことを示した ([13])。これは Witt vector と Artin-Hasse exponential series を使う，いささか大掛かりな証明であった。ところが，茨城大学の市村文夫教授は[3]で「標数 $p > 0$ の一変数関数体の整数環の不分岐 p^n 次巡回拡大は正規底をもつ」ことを簡潔な議論で正規底を実際に構成することによって示された。市村教授の議論を精査すると，一般の環に関しても適用する議論であることが判明した。この作業の中で，「標数 $p > 0$ の環の不分岐 p^n 次 Galois 拡大は正規底をもつ」ことを示すことができた。

(4) Mazur, Rubin, Silverberg の共著論文[8, Remark 5.11]で言及されている twisted group scheme の一例である algebraic torus に対して拙論[14]で sculpture problem と embedding problem について議論した。その時に，[8]では体の上に限定して議論を進めているため，一般の環の上で彼らの結果が正しいか確認する必要があった。[8]の手法は covariant method であったが，contravariant method を採用することによりこの問題は解決できた。algebraic torus に対する Kummer 理論の研究に副産物とも言える結果である。

なお，小出/関口は[7, Theorem 6.1]において，不必要な仮定を付しているにしても，multiplicative group scheme G_m に対して[8]の結果を一般の環の上に一般化している。証明の方法は[8]に従っている。ただ，奇妙なことに[7]では参考文献に[8]を挙げながら，[8, Remark 5.11]には一切言及していない。また，関口/戸田は[9, Theorem 3.3]において，不必要な仮定の下ではあるものの，興味深い algebraic torus の完全列を得ている。しかしながら，その証明には不備がある。

[8]の結果を一般の環の上で証明するために考案した contravariant method を用いれば[9, Theorem 3.3]は瞬時にして得られる。[9]の誤りは著者たちが責任をもって対処することとして，摩擦が起きないように論文

を公表する方策を思案しているところである。

(5) 島根大学の青木美穂准教授に Lucas 数列に関する R. R. Laxton の論文「On groups linear recurrence, I」を教示いただいた。この論文は半世紀以上前に出版されたもののそれ程注目を浴びず、青木准教授がようやく発掘された仕事であるような印象を受けている。この論文を精査したところ、諏訪が [10][12] で用いた手法およびそこで得られた結果が見事なくらいに適用できることが分かった。そして、Lucas 数列に関する M. Ward, Laxton, 青木/酒井悠帆による結果が、affine group scheme の言葉を用いることによって、整理され一般化されることを示した。言い換えれば、数式の計算に埋もれた Ward や Laxton の議論の本質が明らかにした。この結果は本研究課題とは直接の関係はないが、本研究で用いている手法の有用性を示すものであろう。思いがけない展開であったけれど、青木准教授との共同研究を立ち上げることにした。

参考文献

- [1] A. Alvarez, C. Sancho, P. Sancho, Algebra schemes and their representations. *J. Alg.* 296 (2006) 110-144
- [2] Y. Doi, M. Takeuchi, Cleft comodule algebras for a bialgebra. *Comm. Alg.* 14 (1986) 3053-3085
- [3] H. Ichimura, On normal integral bases of unramified abelian p -extensions over a global function field of characteristic p . *Finite Fields and Their Applications* 10 (2004) 432-437
- [4] C. Kassel, A. Masuoka, Flatness and freeness properties for the generic Hopf Galois extensions. *Revista de la Union Mathematica Argentina* 51 (2010) 79-94
- [5] M. Kida, Kummer theory for normal algebraic tori, *J. Algebra* 293 (2005), 427-447
- [6] M. Kida, Descent Kummer theory via Weil restriction of multiplicative groups, *J. Number Theory* 130 (2010), 639-659
- [7] Y. Koide, T. Sekiguchi, On the cyclotomic twisted torus. *Far East Journal of Mathematical Sciences* 72 (2012) 201-224
- [8] B. Mazur, K. Rubin, A. Silverberg, Twisting commutative algebraic groups, *J. Algebra* 314 (2007) 419-438
- [9] T. Sekiguchi, Y. Toda, On the cyclotomic twisted torus and some torsors. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 89 (2013) 461-482
- [10] N. Suwa, Twisted Kummer and Kummer-Artin-Schreier theories. *Tohoku J.*

- Math. J.* 60 (2008) 183-218
- [11] N. Suwa, Around Kummer theories. *RIMS Kokyuroku Bessatsu B12* (2009) 115-148
- [12] N. Suwa, Some remarks on Lucas pseudoprimes. *Math. J. Okayama Univ.* 54 (2012) 1-32
- [13] N. Suwa, Artin-Schreier-Witt extensions and normal bases. *Hiroshima Math. J.* 44 (2012) 325-354
- [14] N. Suwa, Kummer theories for algebraic tori and normal basis problem. *Tokyo J. Math.* 39 (2017) 827-862
- [15] N. Suwa, Group algebras and normal basis problem. *Tohoku Math. J.* 67 (2015) 495-505
- [16] M. Takeuchi, Free Hopf algebras generated by coalgebras. *J. Math. Soc. Japan* 23 (1971) 561-582

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

- [1] N. Suwa, Kummer theories for algebraic tori and normal basis problem. *Tokyo J. Math.* 39 (2017) 827-862
- [2] N. Suwa, Group algebras and normal basis problem. *Tohoku Math. J.* 67 (2015) 495-505

[学会発表](計 4 件)

- [1] N. Suwa, Kummer theories for algebraic tori and Noether's problem. 2016 大分整数論研究集会, 大分大学, '16.10.9.
- [2] N. Suwa, Group algebras and normal basis problem. Hopf Algebras Conference in Tsukuba, つくば国際会議センター, '16.9.12.
- [3] N. Suwa, Kummer theory for algebraic tori and normal basis problem. 研究集会「Tokyo Journal of Mathematics 篠田記念号刊行に寄せて」, 上智大学, '16.3.21.
- [4] N. Suwa, 数 III 方式 Kummer theories for algebraic tori. 2015 大分整数論研究集会, 大分大学, '15.9.1.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

諏訪 紀幸 (SUWA, Noriyuki)

中央大学工学部 教授

研究者番号: 10196925