

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 12 日現在

機関番号：13802

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400030

研究課題名(和文)ディリクレ級数の種々の性質とその関連分野の研究

研究課題名(英文)On reseaches of several properties of Dirichlet series and its related fields

研究代表者

古屋 淳(Furuya, Jun)

浜松医科大学・医学部・教授

研究者番号：10413890

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：整数論における重要な研究課題である「ディリクレ級数の解析」および「それに関連する話題」について取り組んだ。特にそれらのなかでも「(1)リーマンゼータ関数の微分の積に関する近似関数等式の導出」「(2)ディリクレ級数の微分化の積を生成関数にもつ数論的関数の和公式の誤差項の表示公式、および誤差項の非自明な評価の導出」「(3)種々の誤差項の切断型ヴォロノイ公式、および平均値定理の導出」についての結果を残した。

研究成果の概要(英文)：We study the analytic properties of Dirichlet series and its related topics, which are considered as one of the most important problem in number theory. In particular, we derive (1) approximate functional equations of the product of derivatives of the Riemann zeta-functions (2) representation formulas of number-theoretic error terms related to the summation formula of the arithmetical function whose generating function is related to derivatives of some Dirichlet series, and non-trivial estimates of these error terms (3) truncated Voronoi formulas and mean value theorems for several number-theoretic error terms.

研究分野：解析的整数論

キーワード：ディリクレ級数 近似関数等式 ガウスの円問題 周期的ベルヌーイ関数 数論的誤差項

1. 研究開始当初の背景

ディリクレ級数および関連する話題の研究は整数論における重要な研究課題の1つであり、多くの興味深い結果が残されている。例えば、「解析接続等の解析的性質の考察」「特殊値の計算」「種々の平均値定理およびその周辺への応用」などとその活躍の分野は多岐に渡る。特に、平均値定理への応用、および、対応するディリクレ級数の研究・多重ゼータ関数および多重L関数の特殊値の計算等の研究は古典的な問題設定ながら現在でも活発に研究がおこなわれている重要な分野である。このような状況の中、現在までの手法および結果を新たなる対象へと適用することを目的にし、また、現在得られている結果の改良・別解釈を目指すことをも目標とし本研究を始めるに至った。

2. 研究の目的

ディリクレ級数そのものの研究や関連する平均値定理の研究の重要性は前項で取り上げているが、本研究課題ではその中でも特に

- (1) ディリクレ級数の性質の解析
- (2) 関連する平均値定理の研究
- (3) その他、誤差項の挙動・平均値定理の研究

を3つの目標として設定する。具体的内容を以下に記す：

(1) ディリクレ級数の性質の解析：本研究課題では特に「誤差項を係数にもつディリクレ級数の性質」「既存の結果、および関連項目の改良の可能性」の考察に取り組む。現在までの結果はディリクレの約数問題の誤差項を係数にもつディリクレ級数、ガウスの円問題における誤差項を係数にもつディリクレ級数の解析的性質の考察・それをもとにした平均値定理の考察が行われている。それらを踏まえて、一般的な数論的誤差項を係数にもつディリクレ級数の性質の解析を1つの目標として取り組むことを計画する。また、リーマンゼータ関数に対して、過去に得られている結果の見直し・改良またはその可能性の考察も行っていく計画をたてる。

(2) 関連する平均値定理の研究：過年度の研究において、リーマンゼータ関数の微分を生成関数にもつ約数問題における誤差項の表示公式・上からの非自明な評価を、本研究代表者・連携研究者の共同研究の中で得ている。また、誤差項の平均値定理も連携研究者によって考察されている。これらの結果は古典的な約数問題の拡張になっており、古典論における結果の一部を含むような結果になっている。本研究課題においては、これをさらに一般化した物を得ることを目標にして

いく。具体的には、上述の理論を「円問題の微分化」に応用し、平均値定理を導くことを研究目的と設定する。

(3) その他、平均値定理の研究：(2)で述べた「約数問題の微分化」を一般化し、特に「ガウスの円問題および一般約数問題の微分化」に応用をしていくことを目標として設定する。具体的には「誤差項表示公式の導出」を行いそれを応用、例えば「非自明な上からの評価」等を導くことを目標とする。

3. 研究の方法

基本的な方針は「過去において使用されている手法・公式を新しい対象へと適用し研究を遂行する」「現状の方針・公式の適用の可能性の考察」または「新しい手法・公式の導出を行い、それらを適用し結果を導く」ことで上記の問題設定に取り組んでいく。各目標に対する具体的な方針を以下に記す：

(1) ディリクレ級数の性質の解析：本研究課題においては、種々のディリクレ級数の解析に取り組んで行きたいと思うが、特に「誤差項を係数にもつディリクレ級数の解析」「リーマンゼータ関数の微分に関する近似関数等式の導出」に力を入れてみたい。これは、既存の結果が得られた時代から現在までの理論の発展を元に、過去に得られたものを改良する・新たなる対象へと理論を応用する、またはその可能性を考察する、ということを目指したものである。

(2) 関連する平均値定理の研究：生成関数の微分化に対する約数問題、の一般化として古典的な「ガウスの円問題」における生成関数の微分を行って生じた数論的関数の和の漸近公式より生ずる誤差項の二乗平均を導出することを行う。これについては古典的な手法、すなわちペロンの公式および生成関数の種々の性質を利用していくつかの積分を変形していくという手法をとる。この手法は連携研究者の南出氏が「ディリクレの約数問題の微分化」における誤差項の漸近公式を導出したときに用いた手法であるが、今回はより複雑になることが予想され、新しい公式・手法等の開発が必要になることが求められる。

(3) その他、誤差項の挙動・平均値定理の研究：生成関数の微分化に関しては過去の連携研究者の研究・過去の連携研究者との共同研究、等にて取り上げられているが、本課題においてはそれらをさらに拡張し、それを更なる問題へと応用していくことを目標として取り上げる。具体的には、一般的な設定において生成関数の微分化に付随して生じる数論的関数の和の漸近公式より生ずる誤差項の周期的ベルヌーイ関数を用いた表示式を導出する。さらに応用として、それを用い

て誤差項の非自明な評価を導出することを行いたい。この場合も過去における連携研究者との共同研究で用いられた手法を元に公式の導出を行う、または、それを元に必要に応じて新たな公式を導きながら研究を遂行することを行っていく。また、約数問題の別方向の応用として、約数関数を変形した関数、通称「制限付きの約数関数」を導入し、その和の漸近公式における誤差項の二乗平均を研究の対象としていく。この場合も古典論における理論を元に必要に応じて新たな公式を導出していく、と言う方針にて研究を遂行するように計画をしたい。

4. 研究成果

本研究課題で得た結果は大きく分けて以下の4つに分類される。以下のそれらの概要を記すが、いずれも連携研究者との共同研究における結果である：

(1) ゼータ関数の微分に関する近似関数等式の導出：リーマンゼータ関数のその微分の種々の積に関して近似関数等式を導出することに成功した。これらは過去において得られた近似関数等式の誤差項の改良になっている。これらを導くためには、過去に得られた手法をもとに、約数問題の微分化等の最近の研究で得られた手法・公式を利用しそれらを精密化したものを適用することを行っていく。

(2) ガウスの円問題の微分化に対応する平均値定理の導出：古典的なガウスの円問題の生成関数はリーマンゼータ関数と4を法とする指標に付随するL関数の積であるが、それらの微分を乗じたときに生ずるディリクレ級数の係数に関する和公式を考え、その公式中の誤差項の切断型ヴォロノイ公式と二乗平均の導出を行った。その方法は連携研究者の南出氏の微分約数問題における手法を基にしたものであるが、この場合は既存の結果の適用だけでは研究は遂行されずに新たな積分公式・和公式の導出も必要になりそれらを適用することにより結果を得ることに成功した。

(3) 古典的約数関数の拡張における和公式の誤差項の平均値定理：リーマンゼータ関数の微分と一般的なディリクレ級数の積より生ずる数論的関数の和公式における誤差項の周期的ベルヌーイ関数での表示式を導出した。これは、オイラー・マクローリンの和公式や Partial summation などの、約数問題の微分化における過去の研究の手法を適用して得られた結果であるが過去の研究とは違って一般的な設定のまま計算を突き進めているため途中でディリクレ級数の係数に関する種々の仮定が必要になる場面が出

てくるのであるがその仮定は、既存の、ある種のディリクレ級数の性質と矛盾することはなく自然な仮定であることが分かる。それらの結果の応用として、円問題の微分化と一般約数問題の微分化における誤差項の非自明な評価の導出に成功した。特に、一般約数問題に関しては、その問題中におけるある定数 a と指数対 (κ, λ) の3つの数の大小により場合分けされるという結果になることが分かった。また、微分の階数はその場合分けには影響してこないこともあわせて分かった。

(4) 条件付きの、ある種の数論的関数の和についての解析：約数関数（自然数 n の約数の個数）の和公式における誤差項を考えるのが通常の約数問題であるが、その約数関数を「ある範囲に入る約数のみ」に制限して数え上げる数論的関数を定義し、その和公式・和公式における誤差項の二乗平均を考えそれらを導いた。そこでこの手法は連携研究者の谷川氏が過去において発展させた理論を用いているが、周期的ベルヌーイ関数を含む和公式から切断型ヴォロノイ公式も導き、それを古典論における理論に当てはめることにより目標物を得ると言う手法である。また、メビウス関数の和公式に条件を付した場合の和に関しての漸近公式の別証明を与えることに成功した。これは生成関数の性質を利用しペロンの公式を用いて証明したものであり、過去において与えられた方法の別証明を与えている。

---以上が本研究課題で得られた主な結果であるが、目標「誤差項を係数にもつディリクレ級数の性質の解析」の考察については、本研究課題の期間中には十分な結果が得られず、成果をまとめあげることはできなかった。これについては今後の課題として設定を行いたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

(1) Jun Furuya, Makoto Minamide and Yoshio Tanigawa : On a new circle problem, Journal of the Australian Mathematical Society (査読あり)、DOI: <https://doi.org/10.1017/S1446788716000525>

(2) Jun Furuya, Makoto Minamide and Yoshio Tanigawa : On a restricted divisor problem、Journal of the Indian Mathematical Society (査読あり)、Vol. 83, No 3-4, 269-287 (2016)

[学会発表] (計 6 件)

(1) 南出真、古屋淳、谷川好男 : $\zeta(s)\zeta'(s)$, $\zeta(s)\zeta''(s)$, $\zeta'(s)\zeta''(s)$ の近似関数等式について、日本数学会年会代数分科会、2017年3月24日、首都大学東京(東京都八王子市)

(2) 南出真、古屋淳、谷川好男 : 条件付きメビウス関数の和について、日本数学会中国四国支部例会、2017年1月22日、愛媛大学(愛媛県松山市)

(3) 南出真、古屋淳、谷川好男 : $\zeta'(s)^2$ の近似関数等式について、日本数学会秋季総合分科会代数分科会、2016年9月17日、関西大学(大阪府吹田市)

(4) 谷川好男、古屋淳、南出真 : 制限約数問題について、日本数学会年会代数分科会、2016年3月18日、筑波大学(茨城県つくば市)

(5) 古屋淳、南出真、谷川好男 : 円問題および一般約数問題の微分化、日本数学会中国四国支部例会、2016年1月24日、広島大学(広島県東広島市)

(6) 南出真、古屋淳、谷川好男 : 微分円問題における有限型 Voronoi 公式、日本数学会秋季総合分科会代数分科会、2015年9月16日、京都産業大学(京都府京都市)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古屋 淳 (Furuya, Jun)
浜松医科大学・医学部・教授
研究者番号 : 10413890

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

南出 真 (Minamide, Makoto)
山口大学・理工学研究科・講師
研究者番号 : 80596552

谷川 好男 (Tanigawa Yoshio)
名古屋大学・多元数理科学研究科・招へい
教員
研究者番号 : 50109261

(4) 研究協力者

なし