

平成 29 年 5 月 24 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400034

研究課題名(和文) トーリック・ファノ多様体とカラビ・ヤウ超曲面の研究

研究課題名(英文) Study on toric Fano varieties and Calabi-Yau hypersurfaces

研究代表者

尾形 庄悦 (OGATA, Shoetsu)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：90177113

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、トーリック・ファノ多様体とその超曲面の射影幾何的性質を、対応する頂点が整数点となる多面体を研究することで、明らかにすることであった。我々は、一般次元でトーリック・ファノ多様体のうちで指数の高いものの特徴付けを与えた。また3次元のトーリック弱ファノ多様体に対応する多面体の正規性を示すことにより、4次元ファノ多様体のカラビ・ヤウ超曲面の幾何的性質の一つを証明した。これらの成果を学術論文として出版し、日本国内や海外の研究集会で発表した。

研究成果の概要(英文)：This study is aimed to find projective geometric properties of toric Fano varieties and their Calabi-Yau hypersurfaces by using the corresponding lattice polytopes. We obtain a characterization of toric Fano varieties with higher index among projective toric varieties. And we find out a projective property of Calabi-Yau hypersurfaces in toric Fano 4-folds by showing the normality of lattice polytopes corresponding toric weak Fano 3-folds. We publish these results as research papers and give talks at workshops held in Japan and overseas.

研究分野：数物系科学

キーワード：代数幾何学 トーリック多様体

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 1995年のアメリカ数学会の代数幾何学夏の学校にて、Sturmfels氏は、正規生成アンブル直線束により射影空間へ埋め込まれた非特異トーリック多様体の定義イデアルは2次の元のみで生成されるであろうと予想した。2次元の場合には、Koelmanの研究により、予想の正しさは良く知られていた。

(2) 我々は、 $n$ 次元トーリック多様体  $X$  上の正規生成アンブル直線束  $A$  により射影空間に埋め込まれたときの定義イデアルは  $n+1$  以下の次数の元で生成され、更に、生成元として  $n+1$  次の元を必要とする組  $(X, A)$  を特定することができた。このとき  $X$  は特異点を持つ。

また、3次元以上で、この予想の確かさを確認するために具体例を計算するとき、アンブル直線束が正規生成かを確認するという困難に出会う。そこで我々は、どのようなアンブル直線束が正規生成になるかを研究することにした。

$n$  を2以上の整数として、 $n$ 次元トーリック多様体上のアンブル直線束は  $n-1$  回以上ツイストすると正規生成になり、 $n$  回以上ツイストすればイデアルが2次生成であることが知られていた。2次元の場合には、Koelmanが、3次元以上では尾形-中川が示した。さらに、 $n$  が3以上の場合には、 $n-1$  回のツイストでもイデアルが2次生成であることを我々は証明した。これらの結果では、 $X$  に特異点を許している。

(3) この後では、3次元非特異トーリック多様体に研究対象を絞って、どのようなトーリック多様体  $X$  でアンブル直線束  $A$  の組  $(X, A)$  に対して  $A$  が正規生成かを課題とした。我々の始めの結果は、条件「2重随伴束  $A+2K$  が0以外の大域切断を持たない」を満たすなら、 $A$  は正規生成であることである。また、3次元非特異トーリック多様体が射影直線への非自明正則写像を持つなら、その多様体上のすべてのアンブル直線束が正規生成であることを証明した。

## 2. 研究の目的

(1) 今回の研究期間内での目的は、3次元非特異トーリック多様体の内でどのような類型のものがその上のすべてのアンブル直線束が正規生成であるかを見極めることである。以前の研究結果である「 $A+K$  が0以外の大域切断を満たさない」組  $(X, A)$  はその候補の一つである。

(2) トーリック弱ファノ多様体の反標準因子は6次元以下では正規生成であることが知られているから、これも候補である。4次元での何らかの情報を引き出し、反標準因子であるカラビ・ヤウ超曲面の代数幾何的性質を導くことも目的である。

## 3. 研究の方法

(1) トーリック多様体上のアンブル直線束は頂点の座標が整数である凸多面体に対応し、直線束の正規生成性や定義イデアルの情報を多面体から導くことができる。

この対応を使って、3次元トーリック弱ファノ多様体の反標準因子に対応する凸多面体の分類に依ると、その個数は3千を上回ることが知られている。直接分類を使うのではなく、3次元トーリック弱ファノ多様体上のアンブル直線束に対応する多面体の情報を得る手法を探る。これがうまく行けば、4次元トーリック・ファノ多様体のカラビ・ヤウ超曲面の性質を引き出すことができる。

(2) また、3次元非特異トーリック多様体のアンブル直線束  $A$  でその2重随伴束  $A+2K$  が非自明な大域切断を持たない場合に、 $A$  に対応する多面体の分類が解っているから、それを手がかりに任意のアンブル直線束に対応する多面体の形がある程度解り、正規生成性や定義イデアルの性質を引き出す。

(3) トーリック弱ファノ多様体は、ゴレンスタイン・トーリック・ファノ多様体のクレパント特異点解消であるから、この研究も重要である。反標準因子に対応する多面体の分類では、時間をかければ原理的には分類できることが知られている。ただし、その個数は次元が1増えると1桁増えるようであり、我々の研究にはそぐわない。指数が大きいものは分類できそうであり、特徴付けがみつければ分類に役立つであろう。

## 4. 研究成果

(1) 3次元非特異偏極トーリック多様体  $(X, A)$  で  $A+2K$  が非自明大域切断を持たないとき、 $X$  上のすべてのアンブル直線束が正規生成であることを証明し、学術論文<sup>4</sup>として出版した。

$A+K$  が0以外の大域切断を持たないときの多様体  $X$  は3次元射影空間のトラス不変点のブローアップか、射影直線上の射影平面束のブローアップ、または、トーリック曲面上の射影直線束の構造を持つトーリック多様体であることは以前の我々の研究で判明していた。

$A+K$  が0以外の大域切断を持つが巨大でないときは、更に射影直線への定数でない正則写像を持つものか、ファノ多様体のブローアップか、または、射影直線束の構造を持つトーリック多様体のブローアップであることが解ったので、以前に得られていた正規生成な場合に帰着できた。

(2) 3次元ゴレンスタイン・ファノ多面体の分類は個数が3千を超し、一つの多様体のクレパント特異点解消も複数個存在するから、単なる分類ではうまく行かない。そこで、カ

スプラチックによる極小ファノ多面体の分類により、随伴束がネフでないようなネフかつ巨大な因子の正規生成性を示し、これらと反標準因子との積が再び正規生成になるというアルゴリズムを見つけて、3次元トーリック弱ファノ多様体上のすべてのアンブル直線束が正規生成であることを証明した。

4次元トーリック・ファノ多様体のトーラス不変因子は弱ファノ多様体の和集合であることから、その非特異変形であるカラビ・ヤウ超曲面に対してその上のすべてのアンブル直線束が正規生成であることを示した。この結果を学術論文<sup>3</sup>として出版し、津田塾大学や琉球大学およびドイツのベルリン自由大学の研究集会で成果を報告した。

(3) 大学院生趙懐亮君と共同で、小林-落合による射影空間と2次超曲面の特徴付けをトーリック多様体の場合に拡張した。

$n$ 次元凸整多面体を $n$ 倍したときに内部に格子点を含まないなら、それは基本 $n$ 単体であることを見つけた。これは、射影空間の特徴付けのトーリック多様体版と見なすことができる。また、 $n$ 次元凸多面体はその $n$ 倍の内部にただ一つの格子点を含めば、ゴレンスタイン・ファノ多様体であることを示した。これらの結果を学術論文<sup>2</sup>として出版した。

一般次元でのゴレンスタイン・トーリック・デルペッツ多様体の反標準因子に対応する多面体の分類は、Batyrev氏とJuny氏により実行されていたが、我々はゴレンスタイン性を仮定せずに、偏極トーリック多様体 $(X, A)$ のうちで $A$ を $n-1$ 回ツイストしたものの随伴束が丁度1次元の大域切断を持てば、それはゴレンスタイン・デルペッツであるという特徴付けを与えて、学術論文<sup>1</sup>として出版した。この論文のなかには、一般には、 $(n-1)A+K$ が0以外の大域切断を持てば $A$ は正規生成でないが、それが1次元のみで $A$ の大域切断の空間の次元が $n+2$ 以上ならば $A$ は正規生成であることも示している。

(4) 偏極トーリック多様体 $(X, A)$ で $A+K$ が0以外の大域切断をもたないときに、 $A$ で射影空間へ埋め込んだときの定義イデアルは、(1)で分類された始めの2種類では2次生成であることが容易に解るが、残りの場合には2次式の共通零点になるであろうと予測できた。これについては、まだ発表していない。以上の(1)~(4)の結果について、韓国のKAISTにおける代数幾何セミナーやルーマニアのモエシウ・デ・ススでの夏の学校、及び、東京農工大でのセミナーで問題の概要とこれまでに解ったことなどを講演した。

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

1 尾形 庄悦, 趙 懐亮, A Characterization of Gorenstein Toric Del Pezzo  $n$ -folds, Far East Journal of Mathematical Sciences, 査読有, 2015, 1049~1064

2 尾形 庄悦, 趙 懐亮, A Characterization of Gorenstein Toric Fano  $n$ -folds with index  $n$  and Fujita's conjecture, Far East Journal of Mathematical Sciences, 査読有, 94 巻, 2014, 65~88

3 尾形 庄悦, Nef and Big Divisors on Toric Weak Fano 3-Folds, International Mathematical Forum, 査読有, 9 巻, 2014, 661~675  
DOI: 10.12988/imf

4 尾形 庄悦, Projective normality of toric 3-fold with non-big adjoint hyperplane sections II, Far East Journal of Mathematical Sciences, 査読有, 84 巻, 2014, 99~110

[学会発表](計 6 件)

1 尾形 庄悦, On ideals defining toric 3-folds, 農工大数学セミナー2017, 2017年3月21日, 「東京高校大学(東京都・東小金井市)」

2 尾形 庄悦, On ideals defining toric varieties, EMS 夏の学校: Multigraded Algebra and Applications, 2016年8月18日, 「モエシウ・デ・スス(ルーマニア)」

3 尾形 庄悦, On ideals defining toric varieties, KAIST 代数幾何セミナー, 2015年9月22日, 「大田(韓国)」

4 尾形 庄悦, Nef and big line bundles on weak Fano toric 3-folds, 研究集会「代数多様体とその周辺」, 2014年10月1日, 「琉球大学(沖縄県・中頭郡西原町)」

5 尾形 庄悦, Projective normality of toric weak Fano 3-folds, 研究集会 Vector Bundles on Algebraic Curves—Algebraic Varieties: Bundles, Topology, Physics, 2014年9月3日, 「ベルリン(ドイツ)」

6 尾形 庄悦, Projective normality of toric weak Fano 3-folds, ミニワークショップ Calabi-Yau varieties: Arithmetic, Geometry and Physics, 2014年8月7日, 「津田塾大学(東京都・小平市)」

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

尾形 庄悦 (OGATA, Shoetsu)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：9 0 1 7 7 1 1 3

##### (2) 研究分担者

無し ( )

研究者番号：

##### (3) 連携研究者

無し ( )

研究者番号：

##### (4) 研究協力者

趙 懷亮 (ZHAO, Huai-Liang)