

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 6 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400039

研究課題名(和文) F特異点と標数0の双有理幾何学に現れる特異点

研究課題名(英文) F-singularities and singularities in birational geometry in characteristic zero

研究代表者

高木 俊輔 (Takagi, Shunsuke)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：40380670

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：F特異点とは、フロベニウス写像を用いて定義される正標数の特異点の総称であり、現在までにF正則、F有理、F純、F単射特異点などの特異点が知られている。F特異点と標数0の双有理幾何学に現れる特異点の対応は、多くの研究者によって研究されてきた。本研究課題では、この対応に関して、次の2つの成果を得た。(1) 数値的Q-Gorensteinの場合に、判定イデアルとde Fernex・Haconの意味の乗数イデアルの対応を証明した。(2) F冪零特異点という新しいF特異点のクラスを導入し、正規F冪零孤立特異点のホッジ理論的な意味を明らかにした。

研究成果の概要(英文)："F-singularities" are a generic term used to refer to singularities defined in terms of Frobenius maps, and there are four basic classes of F-singularities, F-regular, F-pure, F-rational and F-injective singularities. F-singularities are expected to correspond to the singularities in birational geometry in characteristic zero, and many researchers have studied this correspondence. In this research project, we obtained the following two results related to this correspondence: (1) When  $X$  is a numerically  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein variety over an algebraically closed field of characteristic zero, we proved that the multiplier ideals on  $X$  (in the sense of de Fernex-Hacon) coincide, after reduction to characteristic  $p \gg 0$ , with the test ideals. (2) We introduced a new class of F-singularities, F-nilpotent singularities, and gave a Hodge theoretic interpretation of (3-dimensional) F-nilpotent normal isolated singularities.

研究分野：代数幾何学

キーワード：F特異点 可換環論 特異点論 局所コホモロジー

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

F 特異点とは、フロベニウス写像を用いて定義される正標数の特異点の総称であり、現在までに F 正則、F 有理、F 純、F 単射特異点などの特異点が知られている。F 特異点と標数 0 の双有理幾何学に現れる特異点の対応は、応募者を含め、Richard Fedder、原伸生、Vikram Mehta、Mircea Mustata、Karl Schwede、Karen Smith、Vasudevan Srinivas、渡辺敬一、吉田健一など多くの研究者によって研究されてきた。本研究課題でも、この対応について研究を行った。(1) 標数 0 の極小モデル理論に現れる特異点は、古典的には、(対数的)Q-Gorenstein 正規多様体に対してのみ定義される。しかし近年、中山昇や de Fernex・Hacon によって、任意の正規代数多様体に対してその定義が拡張された。一方、F 特異点は Q-Gorenstein 性の仮定なしに定義することができる。そこで本研究課題では、Q-Gorenstein とは限らない場合に、F 特異点と標数 0 の極小モデル理論に現れる特異点の対応に目を向けた。(2) 小平の消滅定理は最初調和積分論を用いて証明されたが、その後 Deligne-Illusie によって標数  $p$  への還元を用いた別証明が与えられた。このように、ホッジ理論とフロベニウス写像を用いた正標数の技巧は密接に関係していることが知られている。F 特異点と標数 0 の双有理幾何学に現れる特異点の対応を明らかにすることは、F 特異点という切り口でこのホッジとフロベニウスの関係を探求することに他ならない。

### 2. 研究の目的

本研究課題の申請時の目的は次の 2 つの問題に取り組むことであった。

(1) 標数 0 の代数閉体上定義された正規代数多様体  $X$  が de Fernex・Hacon の意味で対数的末端特異点しか持たないことと、 $X$  の十分大きな標数  $p \gg 0$  への還元  $X_p$  が F 正則特異点しか持たないことは同値であると予想されている。 $X$  が Q-Gorenstein の場合は原・吉田によって既に知られているため、 $X$  が数値的 Q-Gorenstein の場合を考える。数値的 Q-Gorenstein 性は Q-Gorenstein 性よりも真に弱い条件であり、この場合に上記の予想を肯定的に解決できれば、予想を支持する重要な根拠となる。また de Fernex・Hacon の意味での対数的末端特異点を考えることの意義を補強するという点でも重要である。

(2) F 純特異点と対数的標準特異点の対応は、`Weak Ordinarity Conjecture` と呼ばれる次の数論幾何学的な予想と密接に関係している： $V$  を標数 0 の代数閉体上定義された  $n$  次元非特異射影代数多様体とし、その標数  $p$  への還元を  $V_p$  と記す。このとき、 $V_p$  の構造層のコホモロジーへのフロベニウス作用が全単射となる  $p$  が無限個存在する。

この予想は極めて難解な予想であり、 $V$  が曲線の場合ですら一般には未解決である。そこでこの予想の弱形を考え、その弱形を肯定的に解決することで、F 特異点のホッジ理論的な意味を明らかにしたい。

### 3. 研究の方法

(1) 一般に de Fernex-Hacon の意味の対数的末端特異点を定義するためには無限個の特異点解消を考える必要があるが、無限個のデータを標数  $p$  へ還元することはできない。しかし数値的 Q-Gorenstein 性を仮定することにより、特異点解消を 1 つ固定して考えることができる。これが数値的 Q-Gorenstein 性を仮定する利点である。この特徴付けを利用して、「研究の目的」(1) の予想を数値的 Q-Gorenstein の場合に肯定的に解決することを目指した。

(2) `Weak Ordinarity Conjecture` の主張において、 $V_p$  の構造層のコホモロジーへのフロベニウス作用が全単射になる  $p$  の個数を評価することは、現時点では極めて難しい。そこで「全単射」という条件を、「冪零ではない」という条件に弱めることを考えた。この `Weak Ordinarity Conjecture` の弱形を肯定的に解決し、それを用いて F 特異点のホッジ理論的解釈を与えることを目指した。

### 4. 研究成果

(1) 数値的 Q-Gorenstein の場合の乗数イデアルと判定イデアルの対応

Tommaso de Fernex, Roi Docampo, Kevin Tucker との共同研究において、「研究の目的」(1) の予想を数値的 Q-Gorenstein の場合に肯定的に解決した。より強く、次の結果を証明した：標数 0 の代数閉体上定義された数値的 Q-Gorenstein 代数多様体において、de Fernex・Hacon の意味の乗数イデアルは、十分大きな標数  $p \gg 0$  に還元すると、判定イデアルと一致する。乗数イデアルは非対数的末端点集合を定め、判定イデアルは非 F 正則点集合を定めるため、この結果は(数値的 Q-Gorenstein の場合の)予想の一般化になっている。

(2) F 冪零環の研究

Vasudevan Srinivas との共同研究において、F 冪零環という新しい F 特異点のクラスを導入し、その性質を調べた。特に  $(X, x)$  が 3 次元以下の複素正規孤立特異点ならば、 $(X, x)$  の十分大きな標数  $p \gg 0$  への還元が F 冪零であることと、任意の  $i$  に対し局所コホモロジー  $H_{(x)}^i(X_{an}, \mathbb{C})$  上のホッジフィルトレーションの 0 次部分  $Gr_0^F H_{(x)}^i(X_{an}, \mathbb{C})$  が消えることが同値であることを証明した。この証明のために、「研究の方法」(2) の `Weak Ordinarity Conjecture` の弱形を  $V$  が 2 次元の場合に肯定的に解決した。また、上記の結果の系として、 $(R, m)$  を複素数体  $\mathbb{C}$  上本

質的有限型な 2 次元正規局所環としたとき,  $R$  の十分大きな標数  $p \gg 0$  への還元が  $F$  冪零であることと,  $R$  の  $m$  進完備化の因子類群が  $Q/Z$  を含まないことが同値であることを証明した.

(3) コホモロジー次元と深さの関係  
 上述の(2)の研究過程における, 局所コホモロジー加群に関する研究が, Hailong Dao との共同研究に発展した. この共同研究では, 体上本質的有限型な  $n$  次元正則局所環  $(S, m)$  とそのイデアル  $I$  が与えられたとき, 局所コホモロジー加群  $H_i^1(S)$  と  $S/I$  の深さ  $\text{depth } S/I$  の関係について調べた. 特に,  $\text{depth } S/I \geq 3$  ならば,  $H_1^{n-2}(S) = H_1^{n-1}(S) = H_1^n(S) = 0$  であることを証明した. また  $S/m$  が標数 0 の代数閉体のとき,  $\text{depth } S/I \geq 4$  ならば,  $H_1^{n-3}(S) = 0$  であることと,  $S/I$  の  $m$  進完備化の局所 Picard 群が擦れ群であることが同値であることを証明した.

(4)  $F$  正則特異点・対数的特異点の Gorenstein 判定法

$R$  を標数  $p > 0$  の完全体上で定義された  $F$  正則標準的次元付環とし,  $m$  を  $R$  の斉次極大イデアルとする. 広瀬大輔・渡辺敬一・吉田健一は,  $R$  が Gorenstein 環であることと,  $m$  の  $F$  純閾値  $\text{fpt}(m)$  が  $-a(R)$  と一致することが同値であると予想した. ただし  $a(R)$  は, 後藤四郎・渡辺敬一によって導入された,  $a$  不変量と呼ばれる不変量である. Anurag Singh と Matteo Varbaro との共同研究において,  $X = \text{Spec } R$  の反標準環が有限生成ならば, この予想が正しいことを証明した. 特に  $R$  が  $Q$ -Gorenstein か, もしくは  $R$  の次元が 4 以下でかつ標数  $p$  が 7 以上ならば, 予想は正しい. また,  $S$  を標数 0 の代数閉体上で定義された標準的次元付環とし,  $\text{Spec } S$  は高々 de Fernex・Hacon の意味の対数的端末特異点しか持たないと仮定する.  $n$  を  $S$  の斉次極大イデアルとしたとき,  $S$  が Gorenstein 環であることと,  $n$  の対数的標準閾値  $\text{lct}(n)$  が  $-a(S)$  と一致することが同値であることを証明した.

5. 主な発表論文等  
 (研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 5 件)

1. Shunsuke Takagi and Kei-ichi Watanabe, **F-singularities: applications of characteristic  $p$  methods to singularity theory**, Sugaku Expositions, 査読有, In press (2018).

2. Anurag Singh, Shunsuke Takagi and Matteo Varbaro, A Gorenstein criterion for strongly  $F$ -regular and log terminal singularities, Int. Math. Res. Not., 査読有, In press (2017).
3. Vasudevan Srinivas and Shunsuke Takagi, Nilpotence of Frobenius action and the Hodge filtration on local cohomology, Adv. Math. 305 (2017), 456-478.
4. Hailong Dao and Shunsuke Takagi, On the relationship between depth and cohomological dimension, Compos. Math. 152 (2016), 876-888.
5. Tommaso de Fernex, Roi Docampo, Shunsuke Takagi and Kevin Tucker, Comparing multiplier ideals to test ideals on numerically  $Q$ -Gorenstein varieties, Bull. London Math. Soc. 47 (2015), 359-369.

〔学会発表〕(計 14 件)

1. 高木俊輔, A Gorenstein criterion for strongly F-regular and log terminal singularities, 都の西北代数幾何学シンポジウム, 2016年11月16日, 早稲田大学.
2. Shunsuke Takagi,  $F$ -singularities and singularities in birational geometry, Differential forms in algebraic geometry, 2016年9月19日, University of Freiburg, ドイツ.
3. Shunsuke Takagi, General hyperplane sections of canonical 3-folds in positive characteristic, Higher Dimensional Birational Geometry and Characteristic  $p > 0$ , 2016年9月15日, CIRM, フランス.
4. Shunsuke Takagi, A Gorenstein criterion for strongly  $F$ -regular rings, Commutative Algebra and its Interactions with Algebraic Geometry: Tight Closure, Linkage, and Syzygies, 2016年7月10日, University of Michigan, アメリカ.
5. Shunsuke Takagi, A Gorenstein criterion for strongly  $F$ -regular and log terminal singularities, Beijing Algebraic Geometry Colloquium 5th meeting, 2016年4月9日, Beijing International Center for Mathematical Research, 中国.

6. Shunsuke Takagi, On the tautness of  $\mathbb{F}_q$ -singularities, International Conference on Singularity Theory -In Honor of Henry Laufer's 70th Birthday, 2015年12月14日, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, 中国 .
7. Shunsuke Takagi, F-singularities and Weak ordinarity conjecture, The 10th Anniversary Tokyo-Seoul Conference in Mathematics -Algebraic/Arithmetic/Complex Geometry, 2015年12月3日, 東京大学 .
8. Shunsuke Takagi, Vanishing of local cohomology and local Picard groups, 第3回杜の都代数幾何学研究集会@福岡, 2015年11月25日, 福岡大学 .
9. Shunsuke Takagi, Frobenius action on local cohomology and the Hodge filtration, Workshop on Algebraic Geometry, 2015年10月30日, Fudan University, 中国 .
10. Shunsuke Takagi, Vanishing of local cohomology and local Picard groups, Higher Dimensional Algebraic Geometry 2015, 2015年8月22日, Taiwan National University, 台湾 .
11. Shunsuke Takagi, Frobenius action on local cohomology and the Hodge filtration, 2015 Summer Research Institute on Algebraic Geometry, 2015年7月17日, University of Utah, アメリカ .
12. 高木俊輔, Frobenius action on local cohomology and the Hodge filtration, 代数多様体とその周辺, 2014年10月1日, 琉球大学 .
13. 高木俊輔, F特異点の最近の進展について, 第59回代数学シンポジウム, 2014年9月8日, 東京大学 .
14. Shunsuke Takagi, Nilpotency of Frobenius and divisor class groups, FRG Special Month in Ann Arbor, 2014年6月9日, University of Michigan, アメリカ .

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 出願年月日：  
 国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 取得年月日：  
 国内外の別：

〔その他〕  
 ホームページ等  
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~stakagi/>

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

高木 俊輔 (TAKAGI SHUNSUKE)  
 東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
 研究者番号：40380670

##### (2) 研究分担者

なし

##### (3) 連携研究者

なし

##### (4) 研究協力者

なし