2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 ２１ 日現在

機関番号：１４３０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2014～2018

課題番号：２６４０００４３

研究課題名（和文）可積分系と導来圏のモジュライ理論

研究課題名（英文）integrable system and moduli theory of derived category

研究代表者

稲場　道明（Inaba, Michiaki）

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：８０３５９９３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：代数曲線上で不確定特異点を持つ接続のモジュライ空間の構成を行った．特に分岐不確定接続のモジュライ問題は定式化自体が難しいが，genericな分岐不確定接続に対し，その定式化に成功し，モジュライ空間が非特異でシンプレクティック構造を持つことを示すことができた．
一方，不分岐不確定接続のモジュライ空間は代数的にも構成は比較的容易で，神保・三輪・上野の理論に基づく一般モノドロミー保存変形を代数的に構成することができる．これを確定特異接続のモジュライ空間に変形して，解析的な意味で局所的に持ち上げるという研究も手掛けることができた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
不確定特異点の一般モノドロミー保存変形は，神保・三輪・上野の理論によって確立された可積分系で，ソリトン解を導くなど，幅広い分野へのインパクトを与える理論である．一般モノドロミー保存変形の大域的性質を概念的に捉えるためには、代数曲線上の不確定接続のモジュライ空間で定式化すると明快になる．特に分岐不確定の場合は，モジュライ空間の定式化自体が特に一般種数の場合に非自明であったが，本研究において，局所指数がある種のgenericな条件を満たす場合にその定式化と構成に成功した．

研究成果の概要（英文）：I constructed the moduli space of irreuglar singular connections on algebraic curves. It was difficult to formulate the moduli of ramifeid irregular singular connections, but I succeeded in its formulation and proved that the moduli space of ramified irregular singular connections is smooth with a symplectic structure.
On the other hand, the construction of the unramified irregular singular connections is rather easy and we can construct the generalized isomonodromic deformation based on the Jimbo-Miwa-Ueno theory on the unramified moduli spaces.
I also constructed a deformation of the unramified moduli space to the regular singular moduli spaces and gave a local analytic lift of the generalized isomonodromic deformation.

研究分野：代数幾何学

キーワード：モジュライ　不確定接続　一般モノドロミー保存変形

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９、CK－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

確定特異点をもつ線形常微分方程式のモノドロミー保存変形は Schlesinger 方程式として古典的に良く知られていたが、不確定特異点をもつ線形常微分方程式に対しては、対応するストークスデータを保存する一般モノドロミー保存変形の方程式が神保・三輪・上野の理論で確立していた。これをモジュライ空間の幾何学で概念的に捉えるために、ベクトル束と接続の対のモジュライ空間を考える必要があった。Simpson によって特異点を持たない可積分接続のモジュライ空間が構成され、これと Higgs 束のモジュライ空間との可微分な一対一対応などが確立されていた。研究代表者は、岩崎克則氏、齋藤政彦氏と研究代表者との共同研究により、代数曲線上で確定特異点を持つ放物接続のモジュライ空間を Simpson の手法にならって代数幾何学的に構成し、リーマン・ヒルベルト射，モノドロミー保存変形の定式化を確立していた。
一方，不確定特異点の場合は、対応する一般モノドロミーの空間に相当する wild character variety の研究は Boalch らによって進められ、解析的には Biquard と Boalch によって不分岐不確定特異接続のモジュライ空間が構成されていた。射影直線上の自明束の上の不分岐不確定特異接続のモジュライ空間は Boalch によって構成されていたが、一般の種数の代数曲線上で不確定特異接続のモジュライ空間の代数幾何学的構成は確立されていなかった。特に分岐不確定特異接続のモジュライについては，射影直線上で Bremer と Sage による自明束の上の接続のモジュライ空間の構成はあるものの、種数一般の場合に拡張できるような統一的な構成法ではなく、モジュライの定式化にふさわしい分岐不確定特異接続の概念化自体が確立していない状況であった。一般モノドロミー保存変形については、神保・三輪・上野理論による射影直線上の不分岐不確定特異接続の一般モノドロミー保存変形が具体的かつ精密に完成しており、Bremer と Sage により、分岐不確定接続の場合にも拡張されていた。しかし、一般種数の代数曲線上の不確定特異接続のモジュライ空間上では、一般モノドロミー保存変形の構成をはっきりとは与えられていなかった。
局所的な不確定特異接続に対しては、付随する形式接続と標準型接続への変換を固定しておくことにより、漸近性質を持つ解のなす局所系であるストークスデータを対応させることができる。これを概念的に定式化されたのが、Malgrange・渋谷の定理である。確定特異点から不確定特異点への退化が与えられたとき、特異点の摂動に付随して、ストークスデータを確定特異点まで何らかの形で拡張できないかという問題があった。Hurtubise, Lambert, Rousseau は、射影直線上で確定特異点から不確定特異点に退化する族の上の線形常微分方程式に対して、特異点の摂動が表す方程式から定まるベクトル場の力学系を調べ、その上である種の漸近性を持つ線形常微分方程式の解を用いることにより、unfolded Stokes data なる概念を定めるという理論を構築し始めていた。不確定特異接続の場合の、ストークスデータとの対応を与える、Malgrange・渋谷の定理ほど明快な対応関係ではないが、unfolded Stokes data にその複雑さを許容した範囲で、退化する線形常微分方程式族との対応関係を作る理論が作られた。

２．研究の目的

確定特異点の場合の放物接続のモジュライ空間は、リーマン・ヒルベルト対応射がモノドロミー表現の空間の解析的特異点解消を与え、その固有性からモノドロミー保存変形の幾何学的パンルベ性が得られるという理想的な結果を導いていた。そこで、不確定特異接続についても、そのモジュライ空間の代数幾何学的構成を確立し，一般リーマン・ヒルベルト対応や一般モノドロミー保存変形を理解できる状況を作りたいという目的を持った。不確定特異接続の場合、その一般モノドロミーに対応する wild character variety に関する理論は Boalch が精力的に研究を行っていた。しかし、不確定特異接続の代数幾何学的モジュライ空間については、射影直線上の自明束の上の接続のモジュライを考えるという Boalch らの手法は、一般的なモジュライ空間の構成のためには概念的に機能しないため、Simpson 流の代数幾何学的モジュライ空間の構成理論を用いてアプローチしようと考えた。具体的には、不分岐不確定の場合は、形式接続の分類に対応する福原・Turrittin の定理があるため、福原・Turrittin 不変量から得られる有限次元的なデータを局所指数とみなし、不確定特異接続のモジュライの概念化に繋げたいと考えた。
一方、分岐不確定特異接続については、福原・Turrittin 不変量を固定した接続のモジュライを構成しようという考え方では、モジュライの概念化は全く機能しない。分岐不確定特異接続に対しては、形式的な分岐被覆の上に福原・Turrittin 不変量が定まるため、形式分岐被覆と福原・Turrittin 不変量との間の関係も含めて考える必要がある。実際には形式的なデータそのものでは、モジュライの概念の定式化はできないため、分岐不確定接続の形式的なデータの本質的な部分を、何らかの形で有限次元的なデータに置き換えることにより、分岐不確定接続の定式化を適切に概念化し，モジュライ空間を見通しよく構成することを目指した。また，確定特異点から不確定特異点へ，不分岐不確定特異点から分岐不確定特異点へ退化するのに応じて、接続のモジュライ空間を調べることにより、一般リーマン・ヒルベルト対応や一般モノドロミー保存変形を理解するのに役立てようと考えた。
特に、不確定特異接続の一般モノドロミー保存変形は、射影直線上での神保・三輪・上野によ

る精密な理論からソリトン方程式が導かれる興味深い対象であり、それを緩やかに包み込むようなものとしてモジュライ空間の族を捉え、その研究することで、可積分系の理解へアプローチしたいという、より野心的な目的もある。

３．研究の方法

不分岐不確定特異接続のモジュライ空間については、確定特異点の場合と同様に、ベクトル束に放物構造を付加してモジュライ空間を構成することができる。ここで、局所指数として、福原・Turrittin 不変量から本質的に取り出される有限次元的データを用いている。ただし、この局所指数が特殊な値に退化している場合は、形式接続のデータが一意的には定まらない。モジュライの定式化として、なるべく広い対象を含む形にはしたいが、局所指数が generic な場合に理想的なモジュライ理論となる形での不分岐不確定特異接続のモジュライ空間の定式化を試みた。
一方、分岐不確定特異接続に対しては、局所指数に相当するデータの扱いが定義からは明瞭には見えない。形式接続を実質的に分類決定している福原・Turrittin の定理を参考にはするが、モジュライの定式化のためには有限次元的なデータに置き換える必要があるため、分岐不確定特異接続の特異因子への制限が満たすべき条件を考え、モジュライ空間の構成と相性のよい概念の定式化を試みた。特に、福原・Turrittin 不変量を一般固有値とみなした時に、通常の固有部分空間を考えるのではなく、商固有空間を考えるアイデアを用いた。一方、分岐不確定特異接続には、形式分岐被覆が暗黙に与えられている。この分岐被覆から導かれる有限次元的なある種のフィルターのデータと、商固有空間とが満たすべき両立条件を見つける所がモジュライ概念の定式化の鍵となる。一旦、モジュライの定式化に成功すれば、代数幾何学的な変形理論により、モジュライ空間の非特異性や、シンプレクティック形式の構成が得られることになる。ただし、分岐不確定特異接続のモジュライ空間上のシンプレクティック形式が閉形式であることと、非退化であることの証明のために、不分岐不確定接続や確定特異接続のモジュライ空間への変形を用いることになる。
分岐不確定特異接続のモジュライ空間上のシンプレクティック形式をより明快に記述しようという動機から、接続の特異因子への制限に対するある種の行列分解を対応させるというアイデアを得た。このアイデアを発展させて局所指数のパラメーター付けの工夫を行い、確定特異接続と不確定特異接続を同時に定式化することにより、確定特異接続から不確定特異接続へ退化するモジュライ空間の族の構成するアイデアに至った。ここでも、ベクトル束の特異因子への制限の上のある自己準同型を行列分解することにより、モジュライ空間の族の上の相対シンプレクティック形式の見通し良い記述に繋げた。また、このモジュライ空間の族の上に、不確定一般モノドロミー保存変形の拡張を構成したいと考えた。大域的な拡張はほぼ不可能なため、解析的な意味での局所拡張の構成を試みることになるが、接続を一旦開円板に制限してから、Deligne 延長により、射影直線上の大域接続に拡張し直すというアイデアを用いる。さらに、不分岐不確定特異接続の局所指数が一般であることから、線形代数的手法を用いることにより、拡張した射影直線の無限遠点での留数を一定にするためのある種の調整データを構成し、そのデータに依存する形で、接続を無限１次近傍にシステマティックに拡張する方法を生み出そうとした。

４．研究成果

(1) 齋藤政彦氏との共同研究により、代数曲線上の不分岐不確定接続のモジュライ空間の構成を行い，局所指数が generic な場合は、モジュライ空間が非特異であること、モジュライ空間上にシンプレクティック形式が構成されること、更にストークスデータの空間と比較する方法と、変形理論を用いた純代数幾何学的手法の両方向から、モジュライ空間上の一般モノドロミー保存変形という可積分系が定義されることを示した。この理論を論文としてまとめて、Kyoto Journal of Mathematics に出版した。

(2) 分岐不確定接続については、先行研究結果の手法や研究代表者自身の研究手法からも、そのモジュライ空間の定式化や構成の問題については、全く道筋が見えない難しさがあった。研究代表者は、分岐不確定接続の局所的な特異因子への制限の満たすべき条件を考えた。局所指数を仮想的な固有値とみなし、部分固有空間の代わりに商固有空間のデータを考え、一方、分岐不確定特異接続の背後に隠れている形式分岐被覆から示唆されるある種のフィルターを構成し、両者の間にある種の両立条件をみつけた。これにより、分岐不確定接続の概念化の鍵となる局所データの定式化に成功した。これに基づいて、代数曲線上で generic な意味での分岐不確定接続のモジュライ空間を代数幾何学的に構成した。さらに変形理論を駆使することにより，モジュライ空間の非特異を示し、シンプレクティック形式を構成することができた．シンプレクティック形式が閉形式であることと，非退化であることの証明のために，不分岐不確定接続や確定特異接続のモジュライ空間への変形族を用いた。これら一連の分岐不確定接続のモジュ

ライ空間についての論文はarxiv(1606.02369)に載せ，現在投稿中である。

(3) 代数曲線上で確定特異点をもつ接続について、留数が特殊な条件をもつスペクトル型を固定した放物接続のモジュライ空間の構成、モジュライ空間の非特異性とシンプレクティック構造、モノドロミー保存変形の幾何学的パンルベ性を示した論文を，齋藤政彦氏との共著の形でJournal of Mathematical Society of Japanに出版した。

(4) 分岐不確定接続のモジュライ空間を研究していたところから派生して、モジュライ空間の変形族に対する合流問題、特に、確定特異接続のモジュライ空間から、不確定特異接続のモジュライ空間へ退化する族についての研究を始めた。ここで、相異なる固有値をもつ固定された対角行列についての多項式を用いて局所指数をパラメーター付けするというアイデアを用い、確定特異点を持つ場合も、不確定特異点を持つ場合も、共通して局所指数を扱える形にした。さらに、ベクトル束の特異因子に制限の上のある自己準同型に対するある種の行列分解を用いることによって、モジュライの対象の読み替えを行い、その変形理論を用いることによって、モジュライ空間の非特異性、およびモジュライ空間の族の上の相対シンプレクティック形式を見通しよく記述することに成功した。
一方、モノドロミー保存変形や一般モノドロミー保存変形がどのように繋がるかというのは、一部の可積分系の研究者が精力的に取り組み続けている興味深い問題でもある。神保・三輪・上野の理論から、不確定特異接続のモジュライ空間上には、一般モノドロミー保存変形を与えるベクトル場が定まっているが、これを確定特異接続も含むモジュライ空間の族の上のベクトル場に、解析的な意味で局所的に拡張する仕組みを作り出した。
拡張の構成の前に、神保・三輪・上野の理論で定まっている一般モノドロミー保存変形を復習し、モジュライ空間上の接ベクトル束の部分束として整合的に標準な形で定まっていることから、自然に可積分条件も導かれることの証明を与えた。一般モノドロミー保存変形の可積分性については、射影直線の場合にはもともとの神保・三輪・上野の論文に既に証明されていて、分岐特異接続で射影直線上の場合は、Bremer と Sage によってその拡張の形で可積分性が証明されていた。
一般モノドロミー保存変形の解析的局所拡張のための具体的手法としては、一旦開円板に制限してから射影直線上の大域接続に拡張しておく。次に線形代数学的手法により、拡張した射影直線の無限遠点での留数を一定にするための調整データを構成する。この調整データに依存する形で、もとの接続に対し、接ベクトル方向に平坦な接続として一意的に拡張する仕組みを作り出した。これを貼り合わせる形で、モジュライ空間の族の上に、一般モノドロミー保存変形のベクトル場の解析的局所拡張が得られる。
特異点の摂動に伴った線形常微分方程式の族の研究に関しては、Hurtubise, Lambert, Rousseau による、射影直線上で確定特異点から不確定特異点に退化する線形常微分方程式と、unfolded Stokes data との対応という大きな理論が構築されていた。この理論は、力学系的考察と漸近解析を用いて構築されているが、unfolded Stokes data の構成の背景となる力学系と漸近性質があまりに複雑過ぎることが理由で、研究代表者の構成した相対モジュライ空間上の局所的なベクトル場は、この漸近性質と単純には両立し得ない。この一般モノドロミー保存変形ベクトル場の局所拡張は、調整データに依存するために可積分条件を満たすほど標準的な構成にはなっていないが､一般モノドロミー保存変形の合流問題に関してはかなり踏み込んだ結果であり、今後の理論発展につながると期待される。この一連の研究は論文としてまとめて、最近arxiv(1903.08396)に載せたところである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　3　件）

[1] M. Inaba and M.-H. Saito,
``Moduli of regular singular parabolic connections with given spectral type on smooth projective curves”
J. Math Soc. Japan 70 (2018), no. 3, 879—894. 査読あり

[2] M. Inaba and M.-H. Saito,
``Moduli of unramified irregular singular parabolic connections on a smooth projective curve”
Kyoto J. Math. 53 (2013), no. 2, 433—482. 査読あり

[3] M. Inaba,
``Moduli of parabolic connections on curves and the Riemann-Hilbert correspondence”
J. Algebraic Geom. 22 (2013), no. 3, 407—480. 査読あり

〔学会発表〕（計　4　件）

①　**発表者：**M. Inaba,
講演タイトル：``On the moduli of ramified irregular singular connections on a smooth projective curve”
``Moduli space of connections” at Rennes in July 2014

②　**発表者：稲場 道明**
講演タイトル：``Moduli space of parabolic connections, isomonodromic deformation and compactification problem”
「モジュライ空間の幾何学と可積分系」2017 **年** 9 **月、学習院大学**

③ **発表者：**M. Inaba,
講演タイトル：``Moduli space of regular singular parabolic connections and isomonodromic deformation”,
``Unfolding of the moduli space of unramified irregular singular connections”
``Quantum fields, Geometry and Representation Theory” at Bangalore in July 2018.

④ **発表者：**M. Inaba
講演タイトル：``Unfolding of the unramified irregular singular generalized isomonodromic deformation”
``Discussion meeting Bundle-2019” at Mumbai in March 2019

６．研究組織

(2)研究協力者
研究協力者氏名：齋藤政彦
ローマ字氏名：Saito，Masa-Hiko

研究協力者：阿部健
ローマ字氏名：Abe，Takeshi

研究協力者：望月拓郎
ローマ字氏名：Mochizuki，Takuro

研究協力者：吉岡康太
ローマ字氏名：Yoshioka，Kota

研究協力者：光明新
ローマ字氏名：Komyo，Arata