

令和 2 年 6 月 8 日現在

機関番号：17401
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2019
課題番号：26400048
研究課題名（和文）射影多様体のカステルヌボー・マンフォード正則量とシジジーに関連した話題の研究

研究課題名（英文）Castelnuovo-Mumford regularity and syzygies for projective varieties and its related topics

研究代表者
宮崎 誓（Miyazaki, Chikashi）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・教授

研究者番号：90229831
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：カステルヌボー・マンフォード正則量は射影多様体の定義多項式のシジジーを制御する重要な代数的不変量の一つである。本研究においては、正則量を多様体の次元、次数、余次元および線形k-ブックスバウム性で制御する結果を得た。また、正則量の手法を多重射影空間上のベクトル束の問題に応用し、ホロックス型のベクトル束の分裂判定法を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

射影多様体の定義多項式のシジジーを制御する問題は、ヒルベルトのシジジー定理に始まり、アイゼンバッド・後藤予想による幾何学的不変量による正則量の上限の記述につながっている。本研究は、環の性質と射影多様体の分類を結び付けることを目指したものである。また、ベクトル束の分裂判定法は1970 - 80年代のテーマであるが、正則量の手法から新たな視点を開いていく意義がある。

研究成果の概要（英文）：The Castelnuovo-Mumford regularity is one of the most important invariants measuring the complexity of the defining ideal of projective variety. Our research have obtained an upper bound of the regularity in terms of dimension, degree, codimension and linear k-Buchsbaumness of a projective variety, and have also obtained Horrocks-type splitting criteria for vector bundles on a multiprojective space.

研究分野：代数学（環論・代数幾何学）

キーワード：代数幾何 可換環論 射影多様体 シジジー Castelnuovo-Mumford

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

射影多様体のカステルヌボー・マンフォード正則量の上限を制御する問題は、1980年代にアイゼンバッド・後藤により提示された Regularity 予想を中心に研究が行われてきた。射影曲線、非特異代数曲面(標数0)の場合は1980年代に解決された。その後、射影多様体を低い次元の射影空間に線形射影する方法(Generic Projection)を用いて、カクらはマザー理論を応用する画期的な証明により、次元の低い非特異多様体の場合を解決した。これは1990年代のことである。

一方、ブックスバウム環の理論の応用としてのカステルヌボー・マンフォード正則量の上限の研究は、シュツクラド・フォーゲルの論文に始まり、ホアによる予想を中心に研究が進められてきた。ホア・宮崎の定理は重要な結果の一つであり、可換環の不変量を制御することで組み合わせ可換代数にも応用されてきた。しかしながら、正則量の上限の記述問題の理想的な解決には遠く、目覚ましい結果は1990年代のホア・宮崎、ナーゲル・シェンツェル以降は見当たらない。

代数幾何学の見地からの正則量上限の問題については、2010年ぐらいから始まる野間・カクによる割線と正則量の研究は着目すべき研究である。本研究の代表者である宮崎は、今まで知られていた正則量上限の射影多様体の分類を行い、最小次数の多様体・デルペッツォ多様体の因子となる多様体がある条件の下で正則量の上限もしくは上限の一つ下を満たすということを示した。

MathSciNet で検索すると、2000年以降、カステルヌボー・マンフォード正則量に関連した論文が多く出版されている。組み合わせ論と可換環論に関連した方向では研究の進展が見られている。しかしながら、出発点であるアイゼンバッド・後藤予想の周辺では、グルーソン・ラザースフェルド・ペスキンの論文、ラザースフェルドの方法、カクの論文が革新的だったこともあり、2000年以降はそれに対応する目覚ましい進展があったとは言えない。

また、多重射影空間のカステルヌボー・マンフォード正則量についての基礎付けがマクラガン・スミスらによって行われていた。バリコ・マラスピナが多重射影空間上のベクトル束の分裂判定への応用についての結果を発表していた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、射影多様体のカステルヌボー・マンフォード正則量の上限を制御するアイゼンバッド・後藤予想に近づくべく、ホアによる k -ブックスバウム性を用いた予想の解明することにある。つまり、射影多様体の座標環の中間次元のコホモロジーに関する不変量を用いて、環論的な見地から正則量を制御し、射影多様体の分類を目指す、という構想である。できれば、割線と正則量の関係および線形射影が及ぼす正則量の変化などにも目を向けて、幾何学的見地からも正則量を広く考えていくことを目標にした。

これと同時に、多重射影空間でのカステルヌボー・マンフォード正則量を研究するという方向を考え、多重射影空間に現れる問題に応用することも目標にしていた。特に、多重射影空間上のベクトル束について、ホロックス型の判定法の研究については、研究開始当初からシジジーの手法が有効であることがわかってきたので、これを用いて多重射影空間上のコホモロジーが比較的単純なベクトル束の構造を決定することを目標にした。

3. 研究の方法

射影多様体のカステルヌボー・マンフォード正則量とシジジーに関連した話題について、研究打ち合わせを逐次行うことで研究を進めた。佐賀大学に在籍した時期は、研究分担者である寺井直樹氏および岡田拓三氏と不定期に学内でセミナーを行った。2015年にマラスピナ氏(トリノ工科大、イタリア)から招聘があり、科研費を用いてトリノに滞在し、共同研究を行った。テーマは多重射影空間のカステルヌボー・マンフォード正則量およびウーリッヒ束であり、それまでのお互いの研究結果を基に研究打ち合わせを行った。正則量の定義方法をいくつか考え、試行錯誤をしたが多重射影空間のベクトル束の分裂についての結果を得た。また、マラスピナ氏はその後熊本大学も訪れ、セミナーを行い、共同論文を完成させた。2017年にはハノイ数学研究所での国際研究集会に招待され、そこで講演を行った。カステルヌボー・マンフォード正則量の上限を線形 k -ブックスバウムで記述するという結果であり、これまでの結果を一步ではあるが進展させたと思う。2019年11月には、高知大学においてベクトル束の分裂について講演し、早稲田大学においては射影多様体の正則量の上限についての研究報告を行った。いずれも参加者と研究打ち合わせを行っており、特にベクトル束の研究については表現論的な方法を取り入れながら研究を続けている。

4 . 研究成果

本研究においては、カステルヌボー・マンフォード正則量を線形 k -ブックスバウム性で上限を記述する問題に取り組み、スペクトル系列を用いた方法で結果を得た。ホア氏(ハノイ数学研究所)との1995年の共著論文の証明が簡明になることもわかった。これらの結果はハノイでの国際研究集会で発表した。その後、 k -ブックスバウム性の定義の修正なども含めて、元々のブックスバウム環の研究に返ることが重要と考えており、標準 k -ブックスバウムの新しい概念を研究しているところである。

一方、本研究において最も進展したのは、多重射影空間上のベクトル束の研究である。カステルヌボー・マンフォード正則量の手法を用いて、多重射影空間でのベクトル束の構造に関して、いくつかの結果を得た。まず、多重射影空間でのカステルヌボー・マンフォード正則量を用いて、バリコ・マラスピナのベクトル束の分裂判定について拡張する論文を発表した。射影空間上のコーエン・マッコレー加群に対応するベクトル束は、アウスランダー・ブックスバウムの定理もしくはホッククス判定法により、構造層の捩れの直和に同型になる。さらに、ブックスバウム性を持つベクトル束は、後藤、チャンにより、微分形式の層に対応している。そこで、多重射影空間に微分形式の層の引き戻しのファイバー積を考え、そのコーエン・マッコレー性、ブックスバウム性についての判定法を得た。これによって、多重射影空間上のベクトル束の環論的性質を考えることができ、いくつかの興味深い例をつくることができた。また、マラスピナ氏との共同研究において、多重射影空間上のベクトル束が微分形式の層の引き戻しのファイバー積になるためのコホモロジー判定法についての論文を出版した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Miyazaki, Chikashi	4. 巻 60
2. 論文標題 Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for graded modules and projective varieties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Beitr. Algebra Geom.	6. 最初と最後の頁 57-65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13366-018-0398-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kimura, Kyouko; Terai, Naoki; Yassemi, Siamak	4. 巻 230
2. 論文標題 The projective dimension of the edge ideal of a very well-covered graph	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nagoya Math. J.	6. 最初と最後の頁 169-179
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2017.7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kim, In-Kyun; Okada, Takuzo; Won, Joonyeong	4. 巻 1
2. 論文標題 Alpha invariants of birationally rigid Fano three-folds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Int. Math. Res. Not.	6. 最初と最後の頁 2745-2800
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnw310	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ahmadinezhad, Hamid; Okada, Takuzo	4. 巻 5
2. 論文標題 Birationally rigid Pfaffian Fano 3-folds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Algebr. Geom.	6. 最初と最後の頁 160-199
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2015-0054	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Francesco Malaspina, Chikashi Miyazaki	4. 巻 67
2. 論文標題 Cohomological property of vector bundles on biprojective spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Ricerche Mat.	6. 最初と最後の頁 963-968
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11587-018-0355-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Le Tuan Hoa, Kyouko Kimura, Naoki Terai, Tran Nam Trung	4. 巻 473
2. 論文標題 Stability of depths of symbolic powers of Stanley-Reisner ideals	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 307-323
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2016.10.036	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Chikashi Miyazaki	4. 巻 39
2. 論文標題 Remarks on r-planes in complete intersections	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 459-467
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3836/tjm/1459367269	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chikashi Miyazaki	4. 巻 467
2. 論文標題 Buchsbaum criterion of Segre products of vector bundles on mupliprojective space	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 47-57
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2016.06.037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Le Tuan Hoa, Kyouko Kimura, Naoki Terai and Tran Nam Trung	4. 巻 473
2. 論文標題 Stability of depths of symbolic powers of Stanley-Reisner ideals	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 307-323
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2016.10.036	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Chikashi Miyazaki	4. 巻 143
2. 論文標題 A cohomological criterion for splitting of vector bundles on multiprojective space	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 1435 - 1440
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/S0002-9939-2014-12347-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takuzo Okada	4. 巻 2
2. 論文標題 Nonrational del Pezzo fibrations admitting an action of the Klein simple group	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Eur. J. Math	6. 最初と最後の頁 319 - 332
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-015-0080-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takuzo Okada	4. 巻 109
2. 論文標題 Birational Mori fiber structures of Q-Fano threefold weighted complete intersections	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 Proc. London Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 1549-1600
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/plms/pdu044	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kyouko Kimura, Naoki Terai	4. 巻 422
2. 論文標題 Arithmetical rank of Gorenstein squarefree monomial ideals of height three	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 11-32
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2014.09.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Chikashi Miyazaki
2. 発表標題 Cohomological Criteria for Vector Bundles on Multiprojective Space
3. 学会等名 Splitting, Construction and Stability of Vector Bundles and thier Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Chikashi Miyazaki
2. 発表標題 Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for graded modules and projective varieties
3. 学会等名 International Conference on Commutative Algebra, Discrete Geometry and Singularity Theory, Hanoi and Halong (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Chikashi Miyazaki
2. 発表標題 Castelnuovo-Mumford regularity from the viewpoint of Koszul cohomology
3. 学会等名 Algebraic Geometry Seminar in Kumamoto
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 宮崎 誓
2. 発表標題 Cohomological criterion of vector bundles
3. 学会等名 第5回代数幾何学研究集会 宇部 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 宮崎 誓
2. 発表標題 Cohomological property of vector bundles on multiprojective space
3. 学会等名 第12回 鹿児島 代数・解析・幾何学セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 宮崎 誓
2. 発表標題 多重射影空間上の代数的ベクトル束のコホモロジー的性質
3. 学会等名 農工大数学セミナー2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 宮崎 誓
2. 発表標題 多重射影空間上のベクトル束のCohen-Macaulay性、Buchsbaum性、分裂判定法
3. 学会等名 農工大数学セミナー2015 (招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Chikashi Miyazaki
2. 発表標題 Buchsbaum criterion of Segre products of Buchsbaum modules
3. 学会等名 第37回可換環論シンポジウム(国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Chikashi Miyazaki
2. 発表標題 The Castelnuovo-Mumford regularity and the Buchsbaum property of projective varieties
3. 学会等名 Seminario di Geometria(招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	岡田 拓三 (Okada Takuzo) (20547012)	佐賀大学・理工学部・准教授 (17201)	
研究分担者	寺井 直樹 (Terai Naoki) (90259862)	岡山大学・自然科学研究科・教授 (15301)	