

平成 30 年 5 月 5 日現在

機関番号：10101
 研究種目：基盤研究(C) (一般)
 研究期間：2014～2017
 課題番号：26400058
 研究課題名(和文) 諸分野に現れるアファインはめ込みの研究

研究課題名(英文) Affine immersions in various fields

研究代表者

古畑 仁 (FURUHATA, Hitoshi)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：80282036

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：3次元射影空間内の曲面は、局所的に4次元ベクトル空間内の中心アファイン極小曲面から構成できることを示した。それがアファイン球面に展開可能な曲面になるための条件を調べた。また、中心写像の像が原点を含む平面内にあるような中心アファイン線織面を決定した。統計多様体について断面曲率を定義し、正則断面曲率一定の正則統計多様体内のCR統計部分多様体が、ケーラー多様体内のCR部分多様体と類似の性質をもつことをいくつか確認した。また、佐々木多様体や剣持多様体を基礎多様体としてもつ統計構造を定式化し、興味深い例を発見した。

研究成果の概要(英文)：We showed that a nondegenerate surface in the projective 3-space is locally constructed from a centroaffine minimal surface in the 4-dimensional vector space. The condition for such a surface to be projectively applicable to an affine sphere was obtained. We determined a nondegenerate centroaffine ruled surface such that the image of its center map lies on a plane containing the origin. We defined the sectional curvature for a statistical structure, and found several properties of CR statistical submanifolds in a holomorphic statistical manifold of constant holomorphic sectional curvature, which are similar to well-known results for CR submanifolds in a Kaehler space form. We introduced notions of Sasakian statistical structure and Kenmotsu statistical structure, and gave their interesting examples.

研究分野：微分幾何学

キーワード：射影はめ込み 中心アファインはめ込み 統計多様体 正則統計多様体 CR部分多様体 佐々木統計多様体 剣持統計多様体

1. 研究開始当初の背景

等積アフィン微分幾何学における重要な研究対象である固有アフィン球面は、射影微分幾何学の観点からは射影極小曲面であることがわかる。また、中心アフィン幾何学の観点からは中心アフィン極小曲面にもなっている。固有アフィン球面を含むこれら2つの重要な概念の共通部分については、それがかなり大きなクラスを形成することが示され、その理解は重要な課題であった。

一方、非固有アフィン球面も同じく古典的な研究対象であるが、これはヘッセ多様体、あるいは特別ケーラー多様体との密接な関係が指摘されていた。特別ケーラー多様体は、ケーラー多様体に平坦接続が付随したものであるが、この平坦条件を一般化した概念に正則統計多様体がある。しかしながら、特別ケーラー多様体ではない正則統計多様体の興味深い例はよく知られていなかった。このような多様体の例および性質を調べることは重要な課題であった。

2. 研究の目的

諸分野に現れる特徴的な部分多様体をアフィンはめ込みの微分幾何学を用いて再定式化し、その性質を総合的に調べることを目的とする。とくに、

(1) 射影微分幾何学：射影極小超曲面の中心アフィン極小はめ込みを用いた特徴づけ

(2) 統計多様体論：特別ケーラー多様体の一般化のアフィンはめ込みを用いた構成を中心に研究する。

3. 研究の方法

テーマ(1)については、主に連携研究者藤岡敦と協力して研究を遂行する。テーマ(2)については、主に研究協力者長谷川和泉と協力して研究を遂行する。

毎年ワークショップを開催し情報交換の機会とするとともに、本研究で得られた成果を公表する役割を担わせる。

4. 研究成果

テーマ(1)に関連して、次の成果を得た。

3次元射影空間内の任意の非退化曲面について、4次元等積中心アフィン空間内の局所リフトとして、余次元2の中心アフィン極小はめ込みが存在することを示した。ここで、リフトとは、ベクトル空間への余次元2のはめ込みであり、射影により考えている非退化曲面になるものをさす。

3次元射影空間内の不定値曲面でアフィン球面に展開可能なものは、4次元等積中心アフィン空間内の局所リフトとしてアインシュタイン条件をもつものが存在することによって特徴づけられることを示した。さらに、4次元以上の射影空間の非退化超曲面が、あるアフィン超球面と射影合同であるための必要十分条件は、非退化超曲面のあるリフトの誘導する統計構造が定曲率であることを示した。

また、余次元2の中心アフィンはめ込み(余次元2の前正規化されたブラシュケはめ込み)について、その射影変形に関するいくつかの等積中心アフィン不変量の交換式を得た。

中心写像の像が原点を含む平面内にあるような中心アフィン線織面を決定した。また、中心写像の像が曲線上にあるような中心アフィン線織面を調べた。そのような例が豊富にあることを示し、同一の中心写像をもつ曲面の1パラメータ族を構成し、具体例を図示した。ここで、中心写像は、中心アフィンはめ込みに関して定義される写像で、像が原点になる場合は、そのはめ込みが原点を中心とする固有アフィン球面になる。

1次元多様体から2次元アフィン空間へのアフィンはめ込みの研究を行った。とくに、平面曲線に対してアフィン弧長パラメータの定式化を研究した。すなわち、平面曲線に対してアフィン変換で不変な弧長という概念をどのように構成すべきかを検討した。射影弧長パラメータの理解の深化を目標とすると、各種の幾何学に付随する弧長パラメータという概念を再考することは価値がある。

テーマ(2)に関連して、次の成果を得た。

統計多様体について断面曲率を定義した。これにより、既存の定曲率という概念(黒瀬俊による)を拡張した新しい定曲率の定義を得た。その新たな意味で定曲率となりかつ以前の意味で定曲率ではないような統計多様体の具体例を構成した。さらに、定曲率という概念の複素幾何学版として、正則断面曲率一定の正則統計多様体という概念を得た。

正則断面曲率一定の正則統計多様体内のCR統計部分多様体について研究した。CR部分多様体は、実超曲面や全実部分多様体等を含む概念である。既存のケーラー多様体内のCR部分多様体論の研究を参考にし、それらもつ性質と類似の性質をいくつか確認した。上記の定式化をとると、既存の研究をCR統計部分多様体について応用することが容易になるという利点がある。たとえば、正則断面曲率一定の正則統計多様体のラグランジュ部分多様体は、形作用素と双対形作用素が可換ならば一定の断面曲率をもつことを示した。

偶数次元の幾何学を考えると、前述のようにケーラー多様体の統計多様体版として

正則統計多様体なる概念が既に得られていた(これは特別ケーラー多様体の一般化と理解できる)。一方,奇数次元においては,佐々木多様体が重要で活発に研究されている。佐々木多様体の統計多様体版として,佐々木統計多様体なる概念の定式化を行った。佐々木統計構造は,従来の佐々木構造(正規概接触計量構造)に適切なアファイン接続を付随させたものである。奇数次元球面にあるアファイン接続を実際に構成して,佐々木統計多様体の例を得た。統計多様体の意味のある例としてコンパクトなものはあまり知られていなかったため,この例は貴重なものと言っ
てよい。

さらに,正則統計多様体の実超曲面に対して,いつ佐々木統計構造が誘導されるかを考察した。リーマン多様体の超曲面論では,第2基本形式と形作用素は等価な情報を持っているが,統計多様体の超曲面論ではそれは期待できない(アファインはめ込みの研究の場合と同様な状況であるといっ
てよい)。正則統計多様体の実超曲面が佐々木構造をもつための必要十分条件を第2基本形式と形作用素のみたすべき条件として決定した。このとき,正則統計多様体が正則断面曲率一定とすると,佐々木統計超曲面も断面曲率が一定となることを示した。

概接触計量多様体のよい例として剣持多様体が知られている。この統計多様体版として剣持統計多様体なる概念を導入した。佐々木統計多様体が奇数次元球面をその基礎多様体とする例を含むことと対照的に,剣持統計多様体は奇数次元双曲空間を基礎多様体とする例を含む。剣持多様体はケーラー多様体から直線との捩じれ積を取ることで構成されることが知られているが,同様な性質を考察するために統計多様体に関する捩じれ積の概念の整備を行った。統計多様体の捩じれ積については,統計多様体の例を構成する上で応用が期待でき,重要である

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

Furuhata H., Sasakian statistical manifolds II, Lecture Notes in Comput. Sci. 査読有, 10589(2017), 179-185. (doi: 10.1007/978-3-319-68445-1_21)

Furuhata H., Hasegawa I., Okuyama Y. and Sato K., Kenmotsu statistical manifolds and warped product, J. Geom. 査読有, 108(2017), 1175-1191. (doi: 10.1007/s00022-017-0403-1)

Furuhata H., Hasegawa I., Okuyama Y.,

Sato K. and Shahid, M.H., Sasakian statistical manifolds, J. Geom. Phys. 査読有, 117(2017), 179-186. (doi: 10.1016/j.geomphys.2017.03.010)

Furuhata H., and Hasegawa I., Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds, S. Dragomir, M.H. Shahid, and F.R. Al-Solamy (eds), Geometry of Cauchy-Riemann Submanifolds, Springer Singapore, 査読有, 2016, 179--215. (doi: 10.1007/978-981-10-0916-7_7)

Fujioka A., Furuhata H., and Sasaki T., Projective surfaces and pre-normalized Blaschke immersions of codimension two, Int. Electron. J. Geom. 査読有, 9(2016), 100--110.

Fujioka A., Furuhata H., and Sasaki T., Projective minimality for centroaffine minimal surfaces, J. Geom. 査読有, 105(2014), 87-102. (doi:10.1007/s00022-013-0196-9)

[学会発表](計 9 件)

Furuhata H., Sasakian statistical manifolds and hypersurfaces, PNU-HU Joint Symposium, 2017年12月19日, 北海道大学(北海道)。

Furuhata H., Sasakian statistical manifolds II, 3rd conference on Geometric Science of Information, 2017年11月9日, パリ(フランス)。

古畑仁, 中心写像から見た曲面の中心アファイン幾何学, 第64回幾何学シンポジウム, 2017年8月28日, 金沢大学(石川県)。

古畑仁, 剣持統計多様体, 関大微分幾何研究会, 2017年6月25日, 関西大学(大阪府)。

古畑仁, 佐々木構造をもつ統計多様体, 名城研究集会「多様体上の計量と幾何構造」, 2017年3月4日, 名城大学(愛知県)。

古畑仁, 正則統計多様体のCR部分多様体, 福岡大学微分幾何学研究集会, 2015年10月30日, 福岡大学セミナーハウス(福岡県)。

Furuhata H., Affine differential geometry and surfaces in the projective space, 研究集会

「 Differential Geometry with Dajczer」, 2015年10月6日, 東京工業大学(東京都).

古畑仁, 統計多様体の曲率, ミニワークショップ統計多様体の幾何学とその周辺(7), 2015年9月1日, 北海道大学(北海道).

古畑仁, 正則統計多様体とその曲率, RIMS 共同研究「統計多様体の諸分野への応用」, 2014年11月19日, 京都大学数理解析研究所(京都府).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

「ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺」ホームページ

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furu-hata/workshop/stat/17/>

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furu-hata/workshop/stat/16/>

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furu-hata/workshop/stat/15/>

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furu-hata/workshop/stat/14/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古畑 仁 (FURUHATA Hitoshi)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 80282036

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

藤岡 敦 (FUJIOKA Atsushi)
関西大学・システム理工学部・教授
研究者番号: 30293335

(4) 研究協力者

長谷川 和泉 (HASEGAWA Izumi)