1版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　５ 月 １５ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2018
課題番号：２６４０００６０
研究課題名（和文）次元が無限大へ発散する空間列の幾何学的研究

研究課題名（英文）Geometric study of a sequence of spaces with unbounded dimension

研究代表者
塩谷　隆（Shioya，Takashi）

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：９０２３５５０７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：グロモフは測度の集中現象に基づいて，測度距離空間についての新しい幾何学的理論を提案した．これは次元が無限大へ発散する空間列を研究するのが主目的である．本研究ではこれをさらに深化させた．測度の集中現象は大数の法則の幾何学化であるが，本研究では中心極限定理の幾何学化を研究した．これは相転移現象の臨界状態として現れる．例えば，次元が無限大へ発散する球面の列に対して，半径を変えると，半径のオーダーが小さいときは集中現象が起きて，大きいと きは消散現象が起き，半径が臨界の次元のルートのオーダーのとき，ガウス測度をもつ無限次元 空間へ収束することが観測される．これを他の空間に対して研究した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
空間列の収束や漸近的挙動を調べた幾何学的な研究である．従来の空間のグロモフ・ハウスドルフ収束の研究では，幾何群論と微分幾何の問題であった．しかし本研究は，幾何学のみならず，確率論，統計学，解析学，統計力学などと関係した非常に興味深い研究であり，国内外で学術的に高く評価されている．従来の研究とは異なった独創的な方法で高次元および無限次元空間へアプローチするものであり，今後の進展が期待されている．

研究成果の概要（英文）：Based on the study of concentration of measure phenomenon, Gromov proposed a new geometric theory for metric measure spaces. One of main motivation to study this theory is to investigate a sequence of spaces with unbounded dimension. In our study, we develop and deepen the theory. The concentration of measure phenomenon can be considered as a geometric variant of the law of large numbers. We study a geometric variant of the central limit theorem, which appears as an analog of phese transition phenomenon. One of examples is the sequence of spheres with unbounded dimension. If the radius of the sphere has small order, then we observe the concentration of measure phenomenon. If the radius has large order, then we observe the dissipation phenomenon. If the radius has the order of the square root of the dimension, then we see that the sphere converges to the infinite-dimensional space with Gaussian measure. We have proved this kind of phenomenon for many other spaces.

研究分野：幾何学

キーワード：測度の集中現象　測度距離空間　オブザーバブル直径　オブザーバブル距離　セパレーション距離　等周不等式

1.研究開始当初の背景

レビは球面の等周不等式を用いて，次元の高い単位球面上の 1-リップシッツ関数が(測度収束の意味で)定数に近いことを証明した．この現象は「測度の集中現象」と呼ばれていて，大数の法則の幾何学版と言える．ミルマンは測度の集中現象を用いて，ドボレツキィの定理のより簡単かつ明快な証明を与えた．これにより測度の集中現象は一躍脚光を浴び，バナッハ空間の局所理論のみならず，確率論や応用数学に大きく応用されるようになった．その後，グロモフとミルマンにより，測度の集中現象は正リッチ曲率をもつリーマン多様体にも拡張され，さらに閉リーマン多様体のラプラシアンの正の第一固有値が大きいとき，測度の集中現象が起こることを証明した．以上のような研究を土台として，グロモフは２つの測度距離空間の間の「オブザーバブル距離」を導入した．これは，２つの空間上の 1-リップシッツ関数全体の集合の近さにより定義される．測度の集中現象の起こる空間に対しては，一点空間とのオブザーバブル距離がゼロに近くなり，またその逆も成り立つ．空間の間の距離としては今までグロモフ・ハウスドルフ距離やその類似の距離がよく知られているが，オブザーバブル距離はそれらより弱い位相を与える距離であり，次元が無限大に発散するような空間列の漸近挙動を記述するのに役立つ．さらにグロモフは測度距離空間全体の空間の自然なコンパクト化を導入・研究した．そのコンパクト化の元はピラミッドと呼ばれている．グロモフはここに述べた理論を本の中で説明しているが，そこでは詳細が大幅に略しあり，不正確な部分もあった．これまでの研究で，その重要な部分を解明しつつある．

2.研究の目的

申請者は以前の研究において，次元が無限大に発散するような球面と複素射影空間の列の極限を調べた．その際に相転移現象の類似的現象を観測し，臨界スケールにおいては，球面の極限としてバーチャル無限次元ガウス空間（ガウス測度をもつ無限次元ヒルベルト空間のピラミッド版)，複素射影空間の極限としてはそのホップ作用による商空間が得られた．本研究では，このような現象がどのような空間列に対して起こるかを調べる．またピラミッドそのものの研究はまだ十分行われているとは言えないので，ピラミッドの不変量を定義し研究する．特に測度距離空間の不変量の極限と極限ピラミッドの不変量の関係を調べる．

3.研究の方法

測度距離空間の列 $X_n(n=1,2,...)$に対して，以下の条件を考える．
ある正の実数の列 r_n が存在して，任意の実数列 t_n に対して，
(i) $t_n/r_n \to 0$ ならば $\{t_nX_n\}$はレビ族である．
(ii) $t_n/r_n \to \infty$ならば $\{t_nX_n\}$は消散する．
ここで，t_nX_n は距離を t_n 倍した測度距離空間を表す．この条件は相転移現象の類似と見ることができるので，列$\{X_n\}$の相転移性質と呼ぶことにする.$\{r_n\}$を臨界スケールオーダーの列と呼ぶ．直感的には，空間が対称性をもてば相転移性質をもつと考えられる．申請者は以前の研究において，単位球面の列 S^n と複素射影空間の列 CP^n が相転移性質をもつことを証明した.ここで，臨界スケールオーダーは $r_n = n^{1/2}$ となる.さらに r_nS^n がバーチャル無限次元ガウス空間に収束することを示した．ここで，バーチャル無限次元ガウス空間とは，以下のように定義されるピラミッドである．標準ガウス測度をもつユークリッド空間をガウス空間と呼ぶ．リップシッツ順序について，ガウス空間は次元に関して単調増加であり，その極限は従属するピラミッドの和の閉包に一致する．これをバーチャル無限次元ガウス空間と呼ぶ.r_nS^n がバーチャル無限次元ガウス空間へ収束することは，ある意味で中心極限定理の幾何学版ということができる.さらに，r_nCP^n の極限はバーチャル無限次元ガウス空間のホップ作用による商空間に収束することも証明した.相転移性質が何時起こるか?また,他の対称空間についてはどうか?などは自然な問題であろう．

4.研究成果

以前からグロモフの理論の解明を進めていたが，主要な部分は解明できたので，それを本としてまとめて出版した．
実数 κ と実数直線上の確率測度 α に対して，$\alpha(A) \geq 1-\kappa$ をみたす実数の集合 A についての A の直径の下限を$\mathrm{diam}(\alpha;1-\kappa)$と定義する.測度距離空X のオブザーバブル直径$\mathrm{ObsDiam}(X;-\kappa)$を，X 上の 1−リップシッツ関数 f を動かしたときの$\mathrm{diam}(f_*\mu;1-\kappa)$の上限と定義する．ここで，$f_*\mu$ は μ の f による押し出し測度である．オブザーバブル直径は測度距離空間がどのぐらい集中現象を引き起こしているかを定量的に測るものである．次の定理を証明した：測度距離空間の列$\{X_n\}$が相転移性質をもつための必要十分条件は，$\mathrm{ObsDiam}(X_n;-\kappa)$が κ によらず同じオーダーをもつ数列であることである．これを用いて，特殊直交群，特殊ユニタリ群，コンパクト・シンプレクティック群は相転移性質をもつことを証明した．さらに，オブザーバブル直径やセパレーション距離の極限を調べることが有用であるが，これらについてのある種の極限公式を証明した．これは相転移性質の研究に応用があった．また，測度距離空間の n 乗 l_p 積空間について，オブザーバブル直径の上下からの評価を行い，相転移性質を証明した．これら相転移性質に纏わる一連の研究は小澤氏との共同で行った．

スティーフェル多様体と旗多様体の極限について研究した(首都大の高津氏と共同). 以前の研究において, ユークリッド空間内の半径が次元の平方根の球面の次元が発散するときの極限空間がバーチャル無限次元ガウス空間へ収束すること, および射影空間がガウス空間の商空間へ収束することを証明したが, その手法を拡張・一般化することにより, スティーフェル多様体の次元が発散するときバーチャル無限次元ガウス空間へ収束することを証明した. さらに旗多様体がスティーフェル多様体の商空間として得られることを利用して, 旗多様体がバーチャル無限次元ガウス空間の商空間へ収束することを証明した. また射影空間の一般化である射影スティーフェル多様体の極限も決定した. これらの結果の応用として, スティーフェル多様体と旗多様体のオブザーバブル直径の漸近的な評価を得た.
測度距離空間において, その isoperimetric profile がある関数以上ならば, オブザーバブル分散がその関数から決まる定数以下となることを示し, 等号成立条件を考察した(中島氏と共同). 等号成立は空間が以下の 3 条件(1),(2),(3)のいずれかを満たすことを証明した.
(1) 空間がある 2 点を結ぶ最短測地線で覆われる.
(2) 空間がある 1 点から出発する半直線で覆われる.
(3) 空間が直線で覆われて, それらの任意の 2 直線は分岐点でのみ交わる.
とくに空間がリーマン多様体のとき, 空間は球面に同相(より強く, twisted sphere に微分同相)またはある可微分多様体と実数直線の積に微分同相となる. 上記に述べた isoperimetric profile の比較条件はリッチ曲率の比較条件より緩く, この結果は Cheng の最大直径定理および Cheeger-Gromoll の分割定理の一種の一般化と位置付けられる.
完備非コンパクトなリーマン多様体で体積有限かつ断面曲率が負で-1 以上となるもののエンドについて, ある例を構成した(藤原氏と共同). このような多様体のエンドにどのような位相形が現れるかは一つの大きな問題となっている. 今回, 任意の 3 次元フリップ・グラフ多様体がそのような多様体のエンドに現れることを具体的な計量の構成をすることで示した. 現在, これをさらに進展させつつ論文としてまとめている.
曲率が上に有界なアレクサンドロフ空間の局所構造について研究した(山口氏,永野氏と共同). 局所構造について完全に解明しつつあり, そのような空間は局所的にある種の分岐被覆空間となっていることが判明した. 先行研究として, Burago と Buyalo は空間がポリヘドラルであるときに局所構造を解明し, 一般の場合に予想を立てたが, 本研究により彼らの予想を完全に解決することになる. さらにガウス・ボンネの定理も証明した.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 6 件)

塩谷　隆, 測度距離幾何学---高次元および無限次元空間へのアプローチ---, 日本数学会「数学」, 71 巻, 第 2 号.
https://www.jstage.jst.go.jp/browse/sugaku/list/-char/ja

Hiroki Nakajima and Takashi Shioya, Isoperimetric rigidity and distributions of 1-Lipschitz functions. Adv. Math. 349 (2019), 1198--1233.
DOI: https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.04.043

Takashi Shioya and Asuka Takatsu, High-dimensional metric-measure limit of Stiefel and flag manifolds. Math. Z. 290 (2018), no. 3-4, 873--907.
DOI: https://doi.org/10.1007/s00209-018-2044-y

Ryunosuke Ozawa and Takashi Shioya, Limit formulas for metric measure invariants and phase transition property. Math. Z. 280 (2015), no. 3-4, 759--782.
DOI: https://doi.org/10.1007/s00209-015-1447-2

Ryunosuke Ozawa and Takashi Shioya, Estimate of observable diameter of l_p-product spaces. Manuscripta Math. 147 (2015), no. 3-4, 501--509. DOI: 10.1007/s00229-015-0730-1

Takashi Shioya, Estimate of isodiametric constant for closed surfaces.
Geom. Dedicata 174 (2015), 279–285. DOI:https://doi.org/10.1007/s10711-014-0017-9

〔学会発表〕(計 1 0 件)

Takashi Shioya, Isoperimetric rigidity and distributions of 1-Lipschitz functions, 第 4 回日中幾何学研究集会(Hefei, 中国), 2018 年.

Takashi Shioya, Isoperimetric rigidity and distributions of 1-Lipschitz functions, Global Differential Geometry Workshop (Sanya, 中国) 2018 年.

Takashi Shioya, Isoperimetric rigidity and distributions of 1-Lipschitz functions, Metrics and Measures（東北大学）, 2018年.

Takashi Shioya, Soft isoperimetric rigidity, Metric Measure Spaces and Ricci Curvature（MPI Bonn, ドイツ）, 2017年.

Takashi Shioya, High-dimensional spaces in metric measure geometry,
Geometric Analysis on smooth and non-smooth spaces(SISSA, トリエステ, イタリア),
2017年

Takashi Shioya, Metric measure geometry and concentration of measure
5th Japanese-German University Presidents' Conference (HeKKSaGOn)
(KIT,ドイツ),2016年

Takashi Shioya, High-dimensional spaces in metric measure geometry
HeKKSaGOn Mini-Workshop 2016 (KIT, ドイツ）, 2016年.

Takashi Shioya, High-dimensional spaces in metric measure geometry,
Workshop on Perspectives in Geometric Analysis (Part A)(BICMR, 北京, 中国), 2016年.

Takashi Shioya, Convergence of metric measure spaces, Metric Geometry and Its Applications(復旦大学, 中国), 2016年.

Takashi Shioya, Convergence of metric measure spaces, Workshop on Analysis and Geometry in Metric Spaces(ICMAT, マドリッド, スペイン), 2015年.

〔図書〕(計3件)
Shioya, Takashi, Metric measure geometry. Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures. IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, 25. EMS Publishing House, Zürich, 2016. xi+182 pp. ISBN: 978-3-03719-158-3
DOI: 10.4171/158

Shioya, Takashi, Metric measure limits of spheres and complex projective spaces. Measure theory in non-smooth spaces, 261--287, Partial Differ. Equ. Meas. Theory, De Gruyter Open, Warsaw, 2017. ISBN:978-3-11-055083-2

Shioya, Takashi, Concentration, convergence, and dissipation of spaces. Geometry and topology of manifolds, 299--314, Springer Proc. Math. Stat., 154, Springer, [Tokyo], 2016. DOI:https://doi.org/10.1007/978-4-431-56021-0_16

〔産業財産権〕
○出願状況(計0件)
○取得状況(計0件)

6. 研究組織
これは一人で行った研究である.