

令和元年6月20日現在

機関番号：11401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400063

研究課題名(和文)ポアソン構造に付随するコホモロジー群の研究

研究課題名(英文)Studies of cohomology groups associated with Poisson structures

研究代表者

三上 健太郎 (MIKAMI, KENTARO)

秋田大学・名誉教授・名誉教授

研究者番号：70006592

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：ポアソン構造から定まるハミルトン(ベクトル)場はリー環をなし、GF理論では有限次元化すべく荷重なる概念を用いる。我々は次を得ました。

(1) 2次元斜交空間の形式的ハミルトン場の荷重 24 GFコホモロジー群について、ベッチ数を全て特定し非自明な独立元は7次に3個ある事を突き止めた(約5年要した)。(2) 任意次元線形空間で、斉次多項式係数ポアソン構造から決まるリー環に対し荷重を改良し、GF型理論を展開した。(3) スカウテン括弧積で接束の外積代数はリー超(super)環になり、(コ)ホモロジー群を持つ。2重荷重のアイデアで線形空間の多項式係数ベクトル場の成す外積代数のコホモロジー群を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

斜交平面の形式的ハミルトン場の荷重 24 ゲルファント・フックスコホモロジー群について、非自明なベッチ数の在り場所を特定出来、非自明な物の幾何学的性質の研究という新たな課題を見いだした意義は大きい。斜交空間でのゲルファント・フックス理論をポアソン空間のハミルトンベクトル場に対しても一般化した事で新たな研究の展開が期待される。

リー代数(環)の(コ)ホモロジー理論の類推としてのリー超代数の(コ)ホモロジー理論が成立し二重荷重(double weight)で有限化出来る例の存在も示し、ポアソン構造そのものの研究に寄与するとの見方を得た事は今後のポアソン幾何研究に貢献すると考える。

研究成果の概要(英文)：The set of Hamiltonian vector fields from a Poisson structure consists a Lie algebra. Gel'fand-Fuks theory dealt with (co)chain complex and (co)homology groups of those Lie algebras and reduced general discussions to finite dimensional ones by using "weight". In our research project, we got results in 3 branches.

(1) In the relative GF-cohomology group of formal Hamiltonian vector fields on the 2-plane of weight 24, we identified all the Betti numbers after a long calculation of more than five years. There are 3 independent cycles in degree 7. (2) We modified the weight and developed Gel'fand-Fuks type theory for not only symplectic but also Poisson structures of homogeneous polynomial coefficients on vector space. (3) By Schouten bracket, the set of multivector fields of various degrees forms a Z-graded Lie superalgebra. We introduced a notion of "double weight" and obtained examples of polynomial coefficient multivector fields on n-dimensional vector space.

研究分野：ポアソン幾何学

キーワード：ポアソン構造 リー代数・リー超代数 ヤング図形 (コ)ホモロジー群 ゲルファント・フックス理論
荷重 オイラー数 ベッチ数

1. 研究開始当初の背景

$2n$ 次元シンプレクティックベクトル空間の形式的ハミルトンベクトル場のなすリー環の相対ゲルファント・フックス・コホモロジー群には 3 個のパラメーターがあります。一つ目は空間次元の為の n , 二つ目は余鎖複体の次数 m , そして三つ目は荷重 (ウエイト) w です。D. Kotschick and S. Morita 両氏による, The Gel'fand-Kalinin-Fuks class and characteristic classes of transversely symplectic foliations (arXiv:0910.3414, October 2009) に刺激を受け Mikami, K. and Nakae, Y. and Kodama, H., Higher weight Gel'fand-Kalinin-Fuks classes of formal Hamiltonian vector fields of symplectic \mathbb{R}^2 , (初版 arXiv:1210.1662v1, 2012 October) を世に発信したばかりでした。

2. 研究の目的

以下は, 2014 年四月に本研究を始める際に提出した「研究の目的」の一部抜粋です。

1. ゲルファント・フックス・コホモロジー群を次の 2 つの方向で研究します。
 - (a) 一つはベッチ数を得るための一連の半自動化したアルゴリズムの効率を改良して次元が低い場合 ($n = 1, 2$) に, 計算限界を乗り越える。
 - (b) 二つは 6 次元以上のシンプレクティック空間 ($n > 2$) の形式的ハミルトンベクトル場の成す無限次元リー環の相対ゲルファント・フックス・コホモロジー群の研究です。
2. 一般のポアソン構造を持つポアソン多様体に対し, ハミルトンベクトル場がシンプレクティックの場合と同様に定義されます。一般 n 次元ベクトル空間にシンプレクティックでは無いポアソン構造が与えられた時, 形式的ハミルトンベクトル場が数学的意味を持つ場合を考えたい。
 - (a) 最初にそのような具体例を見つけ (リーポアソン構造がその第一候補です), 更に理論的に特定する仕事に取り組みます。
 - (b) また, これまでのゲルファント・フックスコホモロジー群の研究にウエイト分解が効果的な役割を果たして来たが, ウエイトの概念をアナロジー的に考えることが可能か否か研究したい。もし可能な場合, その効果を具体的に入手したい。

3. 研究の方法

スカウテン括弧積を利用した Mikami, K.: "Local Lie algebra structure and momentum mapping", J. Math. Soc. Japan, 39, 1987, (233–246), DOIURL = <http://dx.doi.org/10.2969/jmsj/03920233> 以来, スカウテン括弧積の性質を十分に理解し, 数式処理 (symbol calculus) 言語に移植して, 具体例について仮説の検証や反例の発見等に役立っています。K. Mikami and T. Mizutani: "Cohomology groups of homogeneous Poisson structures", arXiv:1511.00199v4, 2017 にスカウテン括弧積のサマリーがあります。また, K. Mikami and T. Mizutani: "Euler number and Betti numbers of homology groups of pre Lie superalgebra", arXiv:1809.08028v2, 2018 には, スカウテン括弧積の見方として, derivation からのズレを計っていると指摘しています。

正整数を正整数の和で書き表す仕方を提供するものが, ヤング図形 (Young diagram) です。ゲルファント・フックスコホモロジー群の研究では, 余鎖体 (co-chain space) を特定するのに, ヤング図形のアイデアを得, K. Mikami, Y. Nakae and H. Kodama: "Higher weight Gel'fand-Kalinin-Fuks classes of formal Hamiltonian vector fields of symplectic \mathbb{R}^2 ", arXiv:1210.1662v1, 2012 に発表しました。この手法は我々の一連の仕事を支えています。

4. 研究成果

- 研究目的 1 (a) に関しては, Mikami, K. and Nakae, Y. and Kodama, H.: "Higher weight Gel'fand-Kalinin-Fuks classes of formal Hamiltonian vector fields of symplectic \mathbb{R}^{2n} ", arXiv, 査読無, arXiv:1210.1662v2, 2014 に, ウエイト 22 までの結果が掲載されていたが, 2019 年 3 月末に約 5 年がかりでウエイト 24 の計算が完成しました。
- 研究目的 1 (b) に関しては, Mikami, Kentaro: "Lower weight Gel'fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of formal Hamiltonian vector fields on 6-dimensional plane", arXiv, 査読無, arXiv:1402.6834, 2014 を得ました。
- 研究目的 2 (a),(b) に関しては,
 - Mikami, Kentaro and Mizutani, Tadayoshi: "Cohomology groups of homogeneous Poisson structures", arXiv, 査読無, arXiv:1511.00199v4, 2017 が相当し,
 - Mikami, Kentaro and Mizutani, Tadayoshi: "First Betti number of weighted homology group of Hamiltonian vector fields on symplectic tori", arXiv, 査読無, arXiv:1705.10894, 2017 は, 線形空間ではないコンパクトな空間を扱っているという点で斬新です。
- ポアソン構造 π は 2-ベクトル場であって, スカウテン括弧積に関し $[\pi, \pi]_S = 0$ で特徴付けられています。一方, スカウテン括弧積により接束の外積代数が \mathbb{Z} -graded Lie superalgebra (リー超代数) になる事も知られています。リー超代数に対し, (コ) ホモロジー群を考える事が出来, ポアソン構造は $\partial(\pi \wedge \pi) = 0$ と記述されます。ここで, ∂ はリー超代数の鎖複体 (chain complex) の境界作用素 (boundary operator) です。従って標語的には 2 次サイクル U に対し \sqrt{U} がポアソン構造であると言えます。これはポアソン構造に対する新しい見方であり, リー超代数のホモロジー群を考える事に意味を見いだします。一方計算可能性の観点から新たにウエイトの概念を開発し有限次元化出来るかが鍵になります。本研究で我々は double weight (二重荷重) を発見し, この流れでの最初の仕事³, Mikami, Kentaro and Mizutani, Tadayoshi: "Euler number of homology groups of super Lie algebra", arXiv, 査読無, arXiv:1809.08028v1, 2018 とその改訂版 Mikami, Kentaro and Mizutani, Tadayoshi: "Euler number and Betti numbers of homology groups of pre Lie superalgebra", arXiv, 査読無, arXiv:1809.08028v2, 2018 です。今後, かかるリー超代数のホモロジー群のポアソン構造の集合・モジュライ研究への寄与を深く研究する必要があると考えます。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 10 件)

1. Mikami, Kentaro and Mizutani, Tadayoshi: "The second Betti number of doubly weighted homology groups of some pre Lie superalgebra", arXiv, 査読無, arXiv:1902.09137, 2019
2. Mikami, Kentaro and Mizutani, Tadayoshi: "Euler number and Betti numbers of homology groups of pre Lie superalgebra", arXiv, 査読無, arXiv:1809.08028v2, 2018
3. Mikami, Kentaro and Mizutani, Tadayoshi: "Euler number of homology groups of super Lie algebra", arXiv, 査読無, arXiv:1809.08028v1, 2018
4. Kodama, Hiroki and Mikami, Kentaro and Mizutani, Tadayoshi: "First Betti number of weighted homology group of Hamiltonian vector fields on symplectic tori", arXiv, 査読無, arXiv:1705.10894.v2, 2018

5. Mikami, Kentaro and Mizutani, Tadayoshi: "First Betti number of weighted homology group of Hamiltonian vector fields on symplectic tori", arXiv, 査読無, arXiv:1705.10894, 2017
6. Mikami, Kentaro and Mizutani, Tadayoshi: "Cohomology groups of homogeneous Poisson structures", arXiv, 査読無, arXiv:1511.00199v4, 2017
7. Mikami, Kentaro: "An affirmative answer to a conjecture on the Metoki class", J. Math. Soc. Japan, 査読有, 68, 151–167, 2016, doi = 10.2969/jmsj, url = <http://dx.doi.org/10.2969/jmsj>
8. Mikami, Kentaro: "Another proof to Kotschick-Morita's Theorem of Kontsevich homomorphism", arXiv, 査読無, arXiv:1407.1249, 2014
9. Mikami, Kentaro: "Lower weight Gel'fand-Kalinin-Fuks cohomology groups of formal Hamiltonian vector fields on 6-dimensional plane", arXiv, 査読無, arXiv:1402.6834, 2014,
10. Mikami, K. and Nakae, Y. and Kodama, H.: "Higher weight Gel'fand-Kalinin-Fuks classes of formal Hamiltonian vector fields of symplectic \mathbb{R}^2 ", arXiv, 査読無, arXiv:1210.1662v2, 2014

〔学会発表〕（計 12 件）

1. 三上 健太郎, The second Betti number of homology groups of some pre Lie "sup eralgebras", 第 42 回伊豆トポロジーセミナー 2019 年
2. 三上 健太郎, Poisson structures and Lie superalgebra homologies, Poisson 幾何とその周辺 at 東京理科大学, 2018 年
3. Kentaro Mikami, Euler number of homology groups of "super" Lie algebras, Foliations and Groups of Diffeomorphisms 2018, 2018 年
4. 三上 健太郎, 2nd trial of weighted GF theory for symplectic tori, 伊豆トポロジーセミナー, 2018 年
5. 三上 健太郎, A trial of weighted GF theory for symplectic tori, 様相構造と微分同相群 2017, 2017 年
6. 三上 健太郎, Weighted (co)homology groups of homogeneous Poisson structures, 葉層構造と微分同相群 2016 (Foliations and Diffeomorphism Groups 2016), 2016 年
7. Kentaro Mikami, Weighted cohomology of homogeneous Poisson structures, Poisson 2016, at ETH Zurich, Switzerland 2016 年
8. Kentaro Mikami, GF cohomology of Poisson structures, Workshop on Development of new methods in Symplectic Geometry: JSPS Bilateral joint Research Project between Belgium and Japan, at Tohoku Forum for Creativity 2016 年
9. 三上 健太郎, Cohomology of homogeneous Poisson structures, 名城大学幾何学研究会「幾何構造の深化」, 2016 年
10. Kentaro Mikami, Cohomology groups of homogeneous Poisson structures, Workshop on Poisson Geometry and Mathematical Physics, at Chern Institute of Mathematics of Nankai University, 2016 年
11. 三上 健太郎, Cohomology groups of homogeneous Poisson structures, 秋田幾何セミナー 2015 年
12. Kentaro Mikami, An affirmative answer to a conjecture of Metoki class, 葉層と微分同相群 2014, 2014 年

※ 科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。