

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400064

研究課題名(和文) 有理ホモロジー球面をリンクにもつ複素2次元特異点の研究

研究課題名(英文) A study of complex surface singularities with rational homology sphere link

研究代表者

奥間 智弘 (Okuma, Tomohiro)

山形大学・理学部・教授

研究者番号：00300533

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：リンクがホモロジー球面である2次元特異点の具体的な位相型を固定し、幾何種数、重複度、埋め込み次元の値域、および幾何種数が最大になる場合の構造を確定した(A. Nemethi 教授との共同研究)。一般の2次元特異点の幾何種数イデアルの様々な特徴づけを与え、コアの表現を具体的に与え、良いイデアルの存在を示し、有理型特異点のコアを用いた特徴づけを与えた(渡辺敬一教授と吉田健一教授との共同研究)。楕円型特異点のサイクルが定義するイデアル層のコホモロジーの次元の値域を確定した。

研究成果の概要(英文)：Giving an explicit topological type of a normal surface singularity with homology sphere link, we determined the all possible values of the geometric genus, the multiplicity, and the embedding dimension, and also obtained the complex structures with maximal geometric genus (joint work with Professor A. Nemethi). For general surface singularities, we gave several characterizations of pg -ideals and an explicit expression for the core of pg -ideals, and proved the existence of good ideals and a new characterization of rational surface singularities via core (joint work with Professor Kei-ichi Watanabe and Professor Ken-ichi Yoshida). We also determined the all possible dimension of cohomology of ideal sheaves given by cycles for elliptic singularities.

研究分野：複素特異点論

キーワード：2次元特異点 幾何種数

1. 研究開始当初の背景

複素 2 次元正規特異点は孤立特異点であり、その近傍はリンクといわれる実 3 次元多様体上の錘と同相である。Neumann の定理により、リンクは特異点解消グラフと同値な情報を持つ。このように、2 次元正規特異の位相型は組み合わせ的な情報であり、比較的記述しやすい。そのため、特異点のどのような解析的不変量がどのような条件の下で位相型により決定できるのか、また、特異点解消グラフの不変量としてどのように表せるか、というのは自然な問題である。例えば、Artin の有理型特異点の結果や Laufer の最小楕円型特異点に関する結果はこの観点での問題解決を含んでいる。それに続く Yau の弱楕円型特異点の理論もそのような観点でとらえることが可能である。

Neumann と Wahl により導入されたスプライス商特異点は有理ホモロジー球面をリンクに持つ特異点であり、有理型特異点や最小楕円型特異点を含む比較的広いクラスである。スプライス商特異点に対して、研究代表者は幾何種数や重複度をグラフから計算する方法を得ており、それを応用して Nemethi 教授とともに Neumann—Wahl の Casson 不変量予想を肯定的に解決した。一方、スプライス商特異点は擬斉次特異点の一般化としての側面があるにもかかわらず、同じ位相型を持つ複素 2 次元特異点の中で最大の幾何種数を持つとは限らないことが超孤立超曲面特異点の例によって示されていた。その例においても幾何種数はグラフから計算可能だが、スプライス商特異点の幾何種数公式とは全く異なる。そして、Casson 不変量予想は今も未解決である。このような状況で、解析的不変量がグラフで決定されるような結果が他の特異点に拡張できるかどうか、それらの公式の形など不変量の観点から特殊な特異点の構造をとらえることが出来るかが新たな問題になった。

一方、渡辺敬一教授と吉田健一教授との共同研究において、局所環の整閉イデアルの不変量を特異点解消空間上のコホモロジーを用いて定義し、その値が最大になるイデアルを幾何種数イデアルと定義した。幾何種数イデアルは有理型特異点の整閉イデアルがもつ良い性質を備えているが、任意の特異点の局所環に豊富に存在することを示した。これにより、イデアル論的な観点からの研究の進展も期待された。

2. 研究の目的

本研究では、有理ホモロジー球面をリンクに持つ複素 2 次元特異点を対象として基本的な解析的不変量、とくに幾何種数、重複度、埋め込み次元などと位相不変量の関係を求めて具体的に記述し、特徴のある複素構造をとらえ、その性質と構成方法や定義式などを記述することを目標とした。また、一般の 2 次元特異点に対して、前述のイデアルの不変量

の考察を進め、幾何種数イデアルの理論をさらに発展させ、イデアル論による特異点の解析に用いることも目標とした。

3. 研究の方法

関連する研究集会に参加して新しい知見と研究動向を学び、議論の機会を得て、共同研究者との打ち合わせを行いながら研究を進めた。

(1) 特異点関連の研究集会での研究交流
特異点に関連する研究集会において最新の研究情報や着想を得て、手法についても学んだ。(日仏越特異点研究集会、オーバヴォルフアッハ研究集会、草津研究集会「特異点と多様体の幾何学」、写像の特異点論関連、研究集会「Commutative Algebra and Singularity Theory」)

(2) 関連分野の研究集会での研究交流
複素幾何、トポロジー、代数幾何などに関連する研究集会において最新の研究情報を得て研究の進展に役立てた(多変数関数論冬セミナー、研究集会「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics」、東北結び目セミナー、研究集会「Summer Conference on Hyperplane Arrangements in Sapporo」、日本数学会年会・総合分科会、他)

(3) 共同研究
可換環論的観点からの研究、複素解析幾何学・トポロジーの観点からの研究のため、それぞれの専門家と研究打ち合わせを行った。(日本大学訪問(渡辺教授、吉田教授)、レニイ数学研究所訪問(Nemethi 教授))

(4) 文献の入手
特異点論、複素解析幾何学、トポロジー、代数幾何学に関する最新の文献を入手し知識を補った。

4. 研究成果

(1) 2 次元特異点の局所環の整閉イデアルはそれによるブローアップを経由する特異点解消空間上のサイクルのイデアル層の順像によって表現できる。このイデアル層のコホモロジーの次元は局所環の整閉イデアルの不変量であり、幾何種数以下になる。それが幾何種数に一致する整閉イデアルを幾何種数イデアルとよぶ。本研究では、整閉イデアルが幾何種数イデアルになるための必要十分条件はそのリース環が正規かつ Cohen-Macaulay であることを示した。また、正規化されたヒルベルト多項式の係数を用いた特徴づけも与えた。(渡辺敬一教授と吉田健一教授との共同研究)

(2) 2 次元特異点の局所環の整閉イデアル I に対して、その任意の極小節減 (minimal reduction) Q と I のコロンイデアル $Q:I$

や 1 のコア (1 の節減全体の共通部分) core(1) について考察した。core(1) を具体的に求めることは一般には困難であり、有理 2 重点などの場合を除いてはあまり結果がないと思われる。我々は一般の 2 次元特異点の幾何種数イデアル I に対して、 $Q:I$ と core(1) も幾何種数イデアルになることを示した。また、これらを表現する特異点解消のサイクルを構成する方法を与えた。さらに、幾何種数イデアルに対して core が包含関係を保つことを示した。(渡辺敬一教授と吉田健一教授との共同研究)

(3) 可換環論において、良イデアル (good ideal) の概念が導入されていたが、2 次元特異点の局所環の場合には有理 2 重点の場合を除き存在も知られていなかった。我々は(2)の結果を応用して良イデアルの存在定理を一般の 2 次元特異点に対して証明した。また、幾何種数イデアルが良イデアルになるための幾何学的な条件を与えた。すなわち、良イデアルを表現するためのサイクルが存在する最小の特異点解消の特徴づけを行った。以上の議論により、極大な幾何種数イデアルは良イデアルであることが従う。(渡辺敬一教授と吉田健一教授との共同研究)

(4) 上の結果を応用し、有理型特異点の場合にコアが good ideal の半群上で準同型の性質を持つことを示した。また、2 次元特異点がある有理型特異点であるための必要十分条件が整閉イデアルの包含関係を core が保つことである (標数が 2 でないとき) という、新しい特徴づけを与えた。(渡辺敬一教授と吉田健一教授との共同研究)

(5) 一般に、2 次元特異点の局所環には極大な幾何種数イデアルが無数に存在する。そのため、極大イデアルが幾何種数イデアルになるような特異点の特徴付けが問題となる。本研究では、2 次元ゴレンスタイン特異点に対して、極大イデアルが幾何種数イデアルになるための必要十分条件は次数 1 の極大楕円型特異点 (S.S.T. Yau) であることを証明した。また、極大イデアルが幾何種数イデアルになるような非ゴレンスタイン特異点の例も与えた。

(6) (1) で述べた局所環のイデアルの不変量の値域を求めることは現時点では難しく、一般の特異点に対して言えることは、ゼロと幾何種数を含むことくらいである。本研究では、弱楕円型特異点のサイクルが定義するイデアル層のコホモロジーに関する研究を行い、「イデアルの不変量」がゼロから幾何種数までのすべての整数値を取り得ることを証明した。この結果は Yau の楕円列の理論に類似したものを、一般の特異点でも展開できるかを考察する上で基本的かつ重要である。また、同じような性質を持つ、弱楕円型特異点では

ない特異点の例も与えた。

(7) 非特異曲線の錐となる 2 次元特異点について、幾何種数の最大値を求め、幾何種数が最大になるときに Q ゴレンスタインになることを示し、ある条件の下で重複度の計算方法を与えた。(渡辺敬一教授と吉田健一教授との共同研究)

(6) 一般に、特異点の位相型が与えられたとき、それを実現する複素 2 次元特異点の解析的不変量を求めることや、複素構造の特徴をとらえることは非常に困難である。そのような問題について、リンクがホモロジー球面になる特異点の不変量を考察し、まず具体例からのアプローチを試みた。リンクがホモロジー球面であるとき、それがザイフェルト多様体 (擬斉次特異点の位相型) である場合には幾何種数が最大になるのはゴレンスタイン特異点に限る。しかし、一般にはそれが成り立たないことが以下のように分かった。ある 2 次元特異点の具体的な位相型を固定し、解析的不変量である幾何種数、重複度、埋め込み次元の値域を確定した。さらに、幾何種数が最大になる場合は、ゴレンスタインならスプライス商特異点であり、ゴレンスタインでなければ小平特異点であることを示した。また、その小平特異点の定義式的具体例を与えた。(Nemethi 教授との共同研究)

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 4 件)

T. Okuma: A remark on metrically conical surface singularities of Brieskorn type, Saitama Math. J., 査読有, 31 (2017), 137-139.
<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/research/pdf/smj31-8.pdf>

T. Okuma, K. Watanabe and K. Yoshida: Rees algebras and p_g -ideals in a two-dimensional normal local domain, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有, 145 (2017), no. 1, 39-47.
DOI: 10.1090/proc/13235

T. Okuma, K. Watanabe and K. Yoshida: Good ideals and p_g -ideals in two-dimensional normal singularities, Manuscripta Math., 査読有, 150 (2016), no. 3-4, 499-520
DOI: 10.1007/s00229-016-0821-7

T. Okuma: The multiplicity of abelian covers of splice quotient singularities, Math. Nachr., 査読有, 288 (2015), no. 2-3, 343-352
DOI: 10.1002/mana.201010037

[学会発表](計7件)

奥間智弘: Complex surface singularities with a fixed integral homology sphere link, 日本数学会年会 函数論分科会, 首都大学東京(東京都・八王子市), 2017年3月25日

渡辺 敬一: Geometric genus of cone singularities, 第38回可換環論シンポジウム, IPC 生産性国際交流センター(神奈川県・三浦郡葉山町), 2016年11月21日

T. Okuma: A characterization of rational surface singularities via core of ideals, The 4th Franco-Japanese-Vietnamese Singularities, University of Savoie Mont Blanc, Chambéry (France), 2016年11月8日

渡辺 敬一: A characterization of two-dimensional rational singularities via Core of ideals, 日本数学会年会・代数学分科会, 筑波大学(茨城県・つくば市), 2016年3月16日

奥間智弘: 2次元特異点の幾何種数イデアルと次数1の楕円型特異点について, 2015年度多変数関数論冬セミナー, 京都大学(京都府・京都市), 2015年12月26日

吉田健一: 2次元特異点における Good ideal と p_g -ideal, 日本数学会秋季総合分科会・代数学分科会, 広島大学(広島県・東広島市), 2014年9月26日

T. Okuma: Good ideals and p_g -ideals in normal surface singularities, Commutative Algebra and Singularity Theory 2014, 立山国際ホテル(富山県・富山市), 2014年7月31日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

奥間 智弘 (OKUMA TOMOHIRO)
山形大学・理学部・教授
研究者番号: 00300533

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

都丸 正 (TOMARU TADASHI)
群馬大学・名誉教授
研究者番号: 70132579

(4) 研究協力者

Andras Nemethi