

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400066

研究課題名(和文) 特異点をもつ時空の曲面とワイエルストラス型表現公式

研究課題名(英文) Surfaces with singularities in space-times and Weierstrass-type representation formulas

研究代表者

山田 光太郎 (Yamada, Kotaro)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：10221657

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の折り目特異点をもつ極大面のクラスとして「小林曲面」を定義し、これが固有にはめこまれた零平均曲率曲面で因果特性を変化させるもの・空間的平面全体で定義された関数のグラフとなっているものを数多く含むことを示した。これとは別に、光的直線を含み、この直線をはさんで因果特性を変化させる零平均曲率曲面の例をはじめて構成した。一方、このような直線が現れることを示す直線定理を零平均曲率曲面を真に含む曲面のクラスまで拡張した。一般に3次元ローレンツ多様体の正則曲面上の因果特性が変化するための条件を調べ、零でない一定の平均曲率をもつ曲面は因果特性を変化させないことを示した。

研究成果の概要(英文)：A class of maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space, named "Kobayashi surfaces" is introduced. A surface in this class can be extended to a zero-mean curvature surfaces which changes causal types from space-like to time-like. Existence of infinitely many surfaces among this class which are graphs of functions over the space-like plane. On the other hand, the first example of a zero-mean curvature which contains a light-like line and changes causal types across the line is obtained. Such a property, called the light-like line theorem, are generalized for wider class of surfaces.

For a surface in Lorentzian 3-manifold which changes its causal type from space-like to time-like at a light-like point, it is shown that the mean curvature function converges to zero at the light-like point. In particular, it is shown that a non-zero constant mean curvature surface cannot change its causal type.

研究分野：微分幾何学

キーワード：ローレンツ多様体 ワイエルストラス表現公式 特異点 極大曲面 型変化

1. 研究開始当初の背景

3次元ローレンツ・ミンコフスキー時空内の空間的極大曲面(誘導計量が正值で平均曲率が恒等的に零である曲面)は、ユークリッド空間の極小曲面と類似の「ワイエルストラス型表現公式」によりリーマン面上の複素解析的なデータで表示することができる(cf. 小林治 1983). 完備空間的極大曲面は平面に限るが、特異点を許すとさまざまな例が存在し、豊富な幾何学的対象と考えることができる. とくに、連携研究者・梅原と代表者は、特異点をもつ極大曲面のクラスとして「極大面」の概念を導入し、ジェネリックな特異点の分類を行った.

一方、ジェネリックでない特異点としては、円錐的特異点がよく研究されている

(cf. 小林治 1984, Fernandez-Lopez-Souam 2005 など). 円錐的特異点をもつ極大面に対して「共役」をとる、という操作を行うと、円錐的特異点は「折り目特異点」に対応する. 特異点集合は、ローレンツ・ミンコフスキー時空の非退化(空間的平面への正射影が局所凸曲線となる)な光的曲線で、曲面はこの曲線を折り目として二重に重なっていることがわかる. このような曲面は、折り目の部分から「時間的極小曲面」すなわち誘導計量がローレンツ計量で、平均曲率が恒等的に零となる曲面に実解析的に延長され、因果特性が変化するような零平均曲率曲面が得られることが知られている(C. H. Gu 1985, V. A. Klyachin 2003). とくに、ローレンツ・ミンコフスキー時空の零平均曲率曲面のグラフが満たす方程式の、全平面での非自明な解が、小林治により2種類得られていた. これは、ユークリッド空間の極小曲面に対するベルンシュタインの定理に対応する定理が、ローレンツ・ミンコフスキー時空では成立しないことを示している.

一般に、零平均曲率曲面が空間的から時間的に因果特性を変化させるなら、その境界は非退化光的曲線か光的直線となることがKlyachin (2003) によって示されたが、直線をはさんで因果特性を変える例は知られていなかった. 代表者らは、このような例に加え、光的直線をはさんで因果特性が変化する零平均曲率曲面の例を得ている(cf. Fujimori-Kim-Koh-Kokubu-Rossman-Shin-Umehara-Yamada-Yang, 2012) が、この光的直線は極大面の折り目特異点とはなっておらず、ワイエルストラス型表現公式から得られるものとは異なった性質を示している. ローレンツ・ミンコフスキー時空の極大面の類似として3次元ド・ジッター時空の平均曲率1をもつ(特異点をもつ)クラスとして「CMC-1面」を考えることができる. このような曲面はワイエルストラス型の表現公式をもち、一般に特異点をもつ

(2006).

このような曲面の中には光的直線を含む解析的拡張をもつものがあるが、それらの例は因果特性を空間的から時間的に変化させない.

2. 研究の目的

ローレンツ・ミンコフスキー時空やド・ジッター空間の曲面で、因果特性を変化させるもの、光的直線を含むものの性質として、

- (1) このような曲面のの大域的挙動、とくに拡張された曲面が固有はめ込みになるようなもののクラスの存在を確かめる.
- (2) ある種の曲面の族(カテノイド、3-ノイドなど)を分類し、その特異点、エンドにおける挙動を考察する.

3. 研究の方法

ローレンツ・ミンコフスキー空間の極大面で折り目特異点をもつような曲面の適切なクラスを設定し、それらの零平均曲率曲面への解析的延長の性質を考察する.

また、ド・ジッター空間のカテノイドで解析的延長を許すものを取り出し、その延長の具体的な表示を与え、このような表示の性質を考察する.

4. 研究成果

3次元ローレンツ・ミンコフスキー時空の零平均曲率曲面の誘導計量が退化する点(光的点)が非退化(誘導計量の表現行列の行列式の微分が消えない)であるならば、その点を通る、曲面上の非退化(加速度ベクトルと速度ベクトルが線形独立)な光的曲線が存在し、その曲線をはさんで因果特性が変化する. このような現象を起こす曲面として、3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の空間的極大曲面で、時間的極小曲面への解析的延長をもつようなものの適切なクラス(小林曲面)を設定し、分類を行った. さらに、この中で principal type とよぶサブクラスの曲面の解析的延長の具体的表示を与え、ある種の条件のもと解析的延長が空間的平面全体で定義された関数のグラフに、またもう少し弱い条件のもと、曲面が固有はめ込みになることを示した. さらに、固有理め込みになるような例の存在を示した.

最初のものは、ユークリッド空間の極小曲面に対するベルンシュタインの定理のローレンツ版の反例が数多く存在することを示

している.

一方, 光的な点が退化 (誘導計量の表現行列の行列式の微分が消える) 点ならば, この点を通る光的直線が曲面に含まれることが知られている.

このことを, 零平均曲率曲面を含む広いクラス (平均曲率ベクトルが解析的に延長される曲面) に拡張し, 直線で因果特性を変化する曲面を局所的に分類することができた.

3次元ローレンツ・ミンコフスキー時空の零平均曲率曲面の方程式は, 空間的曲面の場合は楕円型・時間的曲面の場合は双曲型となるので, これらの例は混合型偏微分方程式の実解析的な解の具体例を与えている.

3次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の零平均曲率グラフの方程式は, 2次元流体の運動方程式類似している. とくに, 2次元の粘性・渦をもたない圧縮流の流れ関数が満たす微分方程式は, ある (ヴァーチャルな) 条件のもと零平均曲率グラフの方程式と一致する.

このとき, 曲面の因果特性の変化は, 流れが超音速から亜音速に変化することに対応する. この観察により, ある種の気体の運動方程式の音速をまたぐような解が得られたことになる.

さらに, 3次元ローレンツ多様体内の曲面が光的点をはさんで因果特性を変えるならば, その点に近づくとき平均曲率が0に収束することを示した. とくに零でない一定な平均曲率をもつ曲面は因果特性を時間的から空間的に変化させることはない.

この結果から, ド・ジッター空間の CMC 1面 で因果特性を空間的から時間的に変化させるような拡張をもつものは存在しない. しかし, ある種のカテナイドの像は, 時間的直線を含む曲面としての解析的延長をもつ. このような例を統一的に扱い, 解析的延長が起こるしくみを解明するのは今後の課題である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski space with applications*, in “Lorentzian Geometry and related Topics”, Springer Proceedings of Mathematics & Statistics 211, pages 232-273, 2017.;

DOI 10.1007/978-3-319-66290-9_14.

(査読あり)

- ② Atsufumi Honda, Miyuki Koiso, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Mixed type surfaces with bounded mean curvature in 3-dimensional space-times*, Differential Geometry and Its Application, vol. 52 (2017) 64-77; DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.diffgeo.2017.03.009>. (査読あり)
- ③ Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Entire zero mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*, The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 60 (2016) 1-37; doi.10.1093/qmath/haw038 (査読あり)
- ④ Luciana F. Martins, Kentaro Saji, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Behavior of Gaussian Curvature and Mean Curvature Near Non-degenerate Singular points on Wave fronts*, in “Geometry and Topology of Manifolds”, Springer Proceedings of Mathematics & Statistics 154, 2016, pages 247-281; DOI:10.1001007/978-4-431-56021-0_14 (査読あり)
- ⑤ Kosuke Naokawa, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Isometric deformation of cuspidal edges*, Tohoku Mathematical Journal, vol 68 (2016), 73-90; (査読あり)
- ⑥ Masaru Hasegawa, Atsufumi Honda, Kosuke Naokawa, Kentaro Saji, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, International Journal of Mathematics, vol. 26 (2015) 1540008 (34 pages), DOI: 10.1142/S012967X54008X (査読あり)

[学会発表] (計 5 件)

- ① Kotaro Yamada, Type changes of spacelike maximal surface in Minkowski 3-space to timelike surfaces, 2016.11, 福岡大学幾何学研究集会

- ② Kotaro Yamada, Type changes of spacelike maximal surface in Minkowski 3-space to timelike surfaces, 2016.09, The 8th International Meeting on Lorentzian Geometry, Malaga, Spain.
- ③ Kotaro Yamada, Analytic extensions of minimal surfaces in Minkowski 3-space to timelike surfaces, 2015.11, Geometric Analysis in Geometry and Topology, Tokyo.
- ④ Kotaro Yamada, Analytic extensions of minimal surfaces in Minkowski 3-space to timelike surfaces, 2015.06, Singularities in Generic Geometry and applications, 2015, Kyoto.
- ⑤ Kotaro Yamada, Analytic extensions of minimal surfaces in Minkowski 3-space to timelike surfaces, 2014.09, The 10th Geometry Conference of the Friendship between China and Japan, Shanghai.

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 光太郎 (Kotaro Yamada)
東京工業大学・理学院・教授
研究者番号：10221657

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

梅原 雅顕 (Masaaki Umehara)
東京工業大学・情報理工学院・教授
研究者番号：90193945

(4) 研究協力者

()