

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 5 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400072

研究課題名(和文) 最小跡に関連する諸問題の発展的研究

研究課題名(英文) An advanced study of cut locus and related topics

研究代表者

伊藤 仁一 (Itoh, Jin-ichi)

熊本大学・教育学部・教授

研究者番号：20193493

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：最小跡に関する総合的研究として、5つのテーマに分けてバランスよく研究を発展させた。(A) Jacobi の最終定理の拡張は論文を完成させ、投稿中であり、系による二次曲面の構成に関しては、論文を公表した。(B) 最小跡の構造をグラフ理論的に調べる一連の論文の主論文を公表した。(C) 向き付け可能な曲面の位相と何個以下の距離関数の臨界点になるかとの関連を示す論文を概ね完成させた。(D) 凸でない多面体の連続平坦折り畳みに関して最小跡を使う方法もあるが、別の方法で先に結果を得た。(E) 最小跡がフラクタル集合となるフィンスラー計量を構成する論文を公表した。

研究成果の概要(英文)：This research of cut locus was separated 5 themes and developed all themes synthetically. (A) As an extension of Jacobi's last statement in general dimension, we finished the paper and submitted it. As a thread construction of quadric surface, we published the paper. (B) A main paper of series of studies of the structure of cut locus by using graph theory was published. (C) We almost finished the paper of the relation between the number of distance functions such that a point is critical and the topology of orientable surface. (D) We discussed continuous flattening of non-convex polyhedral surface by using cut locus, but we firstly got the result by the other method. (E) We published the paper constructing the Finslerian metric with fractal cut locus.

研究分野：幾何学

キーワード：測地線 最小跡 共役跡 多面体

## 1. 研究開始当初の背景

最小跡の研究は、H. Poincaré による曲面の位相との関連から始まり、その後の長く研究され続けてきた。最近、最小跡までの距離関数の Lipschitz 性を示し、Ambrose の問題が曲面で肯定的に解決し、楕円面の一般の点の最小跡の決定し、Jacobi の定理(共役跡の尖点は4つ)に完全な証明を与え一般次元への拡張を試み、その際の特異点を前年度までの研究で決定していた。

## 2. 研究の目的

本研究は、以下に述べるように着実に進展してきている最小跡に関連する研究を、この機会に更なる発展を目指すものである。次の5つのテーマ (A) Jacobi の最終定理の一般化と二次曲面的な現象, (B) 最小跡の構造と性質の研究(グラフとの関連, 第2最小跡), (C) 最小跡に関連する諸問題(最遠点集合, 擬測地線, 距離関数の臨界点等)の研究, (D) 最小跡を応用する問題(PL 多様体の最小跡, 多面体を平らに折り畳む問題, 多面体の unfolding 等), (E) 関連する他の計量における最小跡の考察, に分け, (A)と(C)は益々の発展を, (B)と(D)は特に新たな研究方向が含まれており, これらをバランスよく発展させることを目的とする。

## 3. 研究の方法

- (1) 現段階である程度得られている多くの結果を、まず論文にまとめ発表する。
- (2) 各テーマごとに次のように計画した。
  - (A) Jacobi の定理の一般化の論文の執筆する。糸による二次曲面を構成する論文を公表する(B) 曲面の最小跡のグラフ理論的な構造について論文にまとめ発表する。
  - (C) 距離関数の臨界点を最小跡との関連で調べる。(D) 凸でない多面体を平らに折り畳むことや多面体の展開に最小跡を用いて考察する。(F) フィンスラー計量の最小跡等について考察する。
- (3) 本研究は多くの共同研究から成り立っており、共同研究者と直接会っての詳細な議論が必要不可欠であり、また多くの他分野との関連も深く、それらの研究者の研究協力や専門知識の供与を必要であり、そのための出張を計画している。

## 4. 研究成果

- (1) 研究期間内に 17 編の学術論文を公表した。当初の予定よりおこなわれているものもあるが、3年間の数学の論文数としては十分な成果と言える。また、海外で9回、国内で27回の研究発表を行った。
- (2) 各テーマごとに次のような結果が得ら

れた。

(A) に関しては、Jacobi の定理の一般化に関してその特異点が  $D_4^+$  ラグランジュ宇特異点となることが以前の研究で分かったので、論文にまとめて投稿した。糸による二次曲面を構成する論文を公表した(清原との共同研究)。楕円面は円織面と見なすことが出来ることは古くから知られているが、全ての二次曲面が円織面及び直角双曲線織面として表せることを示した。

(B) に関しては、曲面の最小跡のグラフ理論的な構造についての一連論文のメインとなる論文を公表した(Vilcu との共同研究)。第2最小跡に関しては研究を始めるための準備を行った。

(C) に関しては、最近公表した論文(曲面においてすべての点がどこかの点からの距離関数の臨界点となる。Every point is critical)の第二弾として、臨界点とする距離関数の個数と曲面の位相との関連を示す論文(With respect to whom are you critical?)を一部を概ねまとめた(Vilcu, Zamfirescu と共同研究)。空間開曲線の曲率と捩率の2乗和の平方根の積分を最小となる曲線を調べて、概ね螺旋となることを示した(榎本との共同研究)。

(D) に関しては、凸多面体を連続的に平らに折りたたむことをその最小跡を用いて行うという最近の結果(奈良, Vilcu との共同研究)の拡張として、凸でない多面体に対しても原理的には最小跡を用いて連続変形出来るので検討した。直交多面体の連続平坦折りたたみが可能で有斐ことを示した(奈良, E. Demaine, M. Demaine との共同研究)。この方法を拡張して凸でない任意の多面体の連続的平坦折り畳みが可能である(奈良と E. Demaine を中心とする MIT のメンバーとの共同研究)。

(E) に関しては、フィンスラー計量でも最小跡がフラクタル集合となる計量の構成を行い、リーマン計量の場合と一緒に論文にまとめて公表した(Sabau との共同研究)。

(3) 前回の科研費による研究に引き続いて、それを発展させる方向に研究を進めることが出来た。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計17件)

J. Itoh, C. Nara, Transformability and reversibility of unfoldings of doubly-covered polyhedra. Discrete and computational geometry and

graphs, 77-86, Lecture Notes in Comput. Sci., 8845, Springer, Cham, 2014, 査読有

J. Itoh, C. Vilcu, Every graph is a cut locus, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 67 (2015), 1227-1238

J. Itoh, J. Rouyer, C. Vilcu, Moderate smoothness of almost Alexandrov surfaces, Intern. J. Math. 査読有, 26 (2015), DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0129167X15400042>

J. Itoh, J. Rouyer, C. Vilcu, On the theorem of three perpendicular, Elem. Math., 査読有, 70 (2015), 71-78

Z. Abel, E. Demaine, J. Itoh, A. Lubiw, C. Nara, J. O'Rourke, Continuously flattening polyhedra using straight skeletons. Computational geometry (SoCG'14), 396-405, ACM, New York, 2014.

山下雄太郎, 伊藤仁一, 円織面, 直角双曲線織面としての二次曲面, 日本教科内容学会誌, 査読有, 1 (2015), 41-52

J. Itoh, C. Nara, Continuous flattening of truncated tetrahedra. J. Geom., 査読有, 107 (2016), 61-75

J. Itoh, K. Kiyohara, Thread construction revisited, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 68 (2016), 917-938

K. Enomoto, J. Itoh, The total absolute curvature and the total absolute torsion of open curves in the Euclidean space, Comtemp. Math., 査読有, 674 (2016), 41-48

J. Itoh, S. Sabau, Riemannian and Finslerian spheres with fractal cut loci, Differential Geom. Appl., 査読有, 49 (2016), 43-64

伊藤仁一, 中尾温, ICT を用いた平面幾何の発見的学習に関するいくつかの事例, 日本教科内容学会, 査読有, 2 (2016), 111-118

J. Itoh, F. Ohtsuka, A natural generalization of regular convex polyhedra. Topology Appl., 査読有 219 (2017), 43-54

E. Demaine, M. Demaine, J. Itoh, C. Nara, Continuous flattening of orthogonal polyhedral, 査読有, LNCS 9943 (2016), 85-93

T. Horiyama, J. Itoh, N. Katoh, Y. Kobayashi, C. Nara, Continuous folding of regular dodecahedra, 査読有, LNCS 9943 (2016), 120-131

[学会発表](計 36 件)

E. Demaine, Continuously flattening polyhedral using straight skeletons, The 30<sup>th</sup> Annual Symp. On Comput. Geometry, 2014 年 6 月 10 日, 京都(京都大学)

C. Nara, Flattening polyhedral with two adjacent rigid faces, The 6<sup>th</sup> Int. Meeting on Origami in Science, Math. And Education, 2014 年 8 月 11 日, 東京(東京大学)

K. Enomoto, Total absolute torsion of open curves in  $E^3$ , Int. Congress of Mathematicians, 2014 年 8 月 18 日, Seoul (Korea)

J. Itoh, Total torsion and curvature of open curves, Geometry Conference TZ-70, 2014 年 9 月 10 日, Univ. Haute-Alsace, Mulhouse (France)

清原一吉, 楕円体上の共役跡と  $D_4^+$  ラグランジュ特異点, 日本数学会秋季総合文科会 2014 年 9 月 15 日, 広島大学

K. Enomoto, The total absolute torsion of open curves in  $E^3$ , AMS Fall Western Meeting, 2014 年 10 月 25 日, San Francisco State Univ. (U.S.A.)

清原一吉, リウヴィル多様体上のヤコビ場と 2 次超曲面の射影同値, 測地線及び関連する諸問題, 2015 年 1 月 11 日, 熊本大学

S. Sabau, On the cut locus of a family of Finslerian manifolds, 日本数学会年会, 2015 年 3 月 21 日, 明治大学

伊藤仁一, ICT 活用の図形学習の授業における生徒の発見とその一般化, 数学教育学会, 2015 年 3 月 22 日, 明治大学

J. Itoh, Quadric surfaces as the surfaces generated by circles or rectangular hyperbolas, Intuitive Geometry, 2015 年 6 月 26 日, Budapest (Hungary)

C. Nara, Continuous folding of regular dodecahedra, JCDCGG, 2015 年 9 月 15 日, 京都大学

E. Demaine, Continuous flattening of orthogonal polyhedral, JCDCGG, 2015 年 9 月 15 日, 京都大学

伊藤仁一, 円織面, 直角双曲線織面としての二次曲面, 日本数学会秋季総合分科会, 2015 年 9 月 16 日, 京都産業大学

伊藤仁一, Moderate smoothness of most Alexandrov surfaces, 2015 年 9 月 16 日, 京都産業大学

奈良知恵, 多面体の連続的平坦折り畳み-菱形の特殊おりをベースに-, 文理融合を目指した折紙科学研究, 2015 年 11 月 12 日, 明治大学

伊藤仁一, 最小跡と多面体の連続的平坦折り畳み, 文理融合を目指した折紙科学研究, 2015年11月13日, 明治大学

伊藤仁一, 直観幾何学と数学教育の現状と今後の展望, 研究会「直観幾何学の数学教育への有用性の研究」, 2015年11月22日, キャンパスプラザ京都

J. Itoh, Cut locus and Intuitive Geometry, Topology seminar, 2015年11月27日, IMAR Bucharest (Romania)

伊藤仁一, 動く模型を用いた教材のいくつかの事例, 日本教科内容学会第3回研究大会, 2016年7月3日, 上越教育大学

伊藤仁一, 直観幾何学と数学教師教育の展望, RIMS 共同研究「直観幾何学を用いた数学教師教育に必要な数学能力開発の研究」, 2016年7月21日, 京都大学数理解析研究所

21 J. Itoh, Some studies of heuristic learning of plane geometry with ICT, Inten. Congress of Math. Education, 2016年7月29日, Hamburg (Germany)

22 K. Kiyohara, The cut locus of Liouville surfaces and manifolds, The cut locus -A bridge over diff. geometry, optimal control and transport-, 2016年8月3日, KMITL Bangkok (Thailand)

23 J. Itoh, With respect to whom are you critical?, The cut locus -A bridge over diff. geometry, optimal control and transport-, 2016年8月4日, KMITL Bangkok (Thailand)

24 J. Itoh, Applications of cut locus and Intuitive Geometry -continuous flattening of polyhedra-, ICMMA2016: Origami-Based Mathematical Modeling and Analysis, 2016年11月12日, 明治大学

25 伊藤仁一, 最小跡と直観幾何学, 測地線及び関連する諸問題, 2017年1月7日, 熊本大学

26 J. Itoh, Some considerations of Maehara's reversing of polyhedral surface, The 6<sup>th</sup> Workshop on combinatorial rigidity theory and polyhedral, 2017年3月17日, Hong Kong City Univ. (China)

27 奈良知恵, 直交多面体の連続的平坦折り畳み, 日本数学会年会, 2017年3月24日, 首都大学東京

〔図書〕(計 0 件)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

伊藤 仁一 ( ITOH JIN-ICHI )

熊本大学・教育学部・教授

研究者番号: 20193493

### (2) 研究分担者

清原 一吉 (KIYOHARA KAZUYOSHI)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号: 80153245

