

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 11 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400079

研究課題名(和文) 結び目の量子不変量と基本群の表現

研究課題名(英文) Quantum invariants of knots and representations of knot groups

研究代表者

村上 斉 (Murakami, Hitoshi)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：70192771

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：結び目の色付きJones多項式に関する体積予想とその一般化を中心に研究を行なった。

($2, 2a+1$)型トーラス結び目の($2, 2b+1$)-cableに対して体積予想の一般化を調べた。その結果、体積予想の一般化がこれらの結び目について成り立っていることを示した。つまり、上記結び目の色付きJones多項式の漸近挙動により、結び目補空間のChern-Simons不変量とReidemeister torsion が得られることが分かった。

研究成果の概要(英文)：In this research I studied mainly on the volume conjecture and its generalization about the colored Jones polynomial of a knot.

As a result, I proved a generalization of the volume conjecture, that is, I proved that the asymptotic behavior of the colored Jones polynomial gives the Chern-Simons invariant and the Reidemeister torsion of the knot complement.

研究分野：結び目理論

キーワード：体積予想 Jons多項式 結び目 Chern-Simons不変量 Reidemeister torsion

1. 研究開始当初の背景

Jones 多項式は 1985 年に Jones により導入された結び目の不変量であり、量子不変量を中心とする量子位相幾何学発展の契機となった。その後、Jones 多項式はリー環 $sl(2; \mathbb{C})$ の 2 次元既約表現に対応することが分かった。一般の N 次元既約表現に対応する結び目不変量は N 次元色付き Jones 多項式と呼ばれる。物理学者 Witten は、 N 次元色付き Jones 多項式を物理観点から再定義した。

一方、1995 年に Kashaev は、量子二重対数関数を用いて結び目の不変量を定義し、その後 1997 年に彼の定義した不変量（自然数 N に依存する）の、 N を大きくしたときのある種の極限により、双曲結び目の体積が得られるであろうと予想した。村上順と研究代表者は、 N 次元色付き Jones 多項式のパラメータに $\exp(2\pi i/N)$ を代入して得られる量が Kashaev の不変量と一致することを示し、さらに、一般の結び目に対してもこの量の極限により結び目補空間の単体的体積が得られるであろうと予想した。これが体積予想である。

体積予想は、前述の Witten の提唱する Jones 多項式の物理的な解釈とあいまって、数学者はおろか理論物理学者からも大いに注目を集めた。体積予想は解決には程遠く、いくつかの事例が知られているのみであった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、体積予想を 2 方向に拡張することである。

まず、パラメータ付体積予想として、「 $\exp(2\pi i/N)$ 」を「 $\exp((2\pi i+u)/N)$ 」に置き換えて、複素数 u を動かすときに ($u=0$ のときが体積予想) 色付き Jones 多項式の漸近挙動を調べる。次のような予想が考えられる。結び目 K の N 次元色付き Jones 多項式を $J_N(K; q)$ とする。

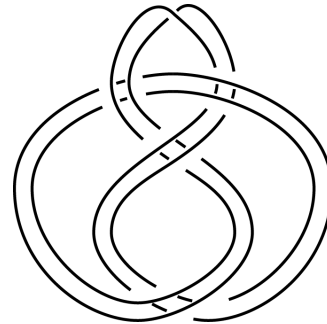
「結び目補空間の基本群から、リー群 $SL(2; \mathbb{C})$ への表現 ρ_u があって、 $J_N(K; \exp((2\pi i+u)/N))$ の N における漸近挙動に、 ρ_u に対応した複素 Chern-Simons 不変量と Reidemeister torsion が現れるであろう」

結び目が双曲的で、 $u=0$ のとき、上の表現はホロノミー表現と呼ばれるもので、結び目補空間の完備双曲構造を決定するものと考えられる。また、複素 Chern-Simons 不変量の実部は双曲的体積であることに注意する。

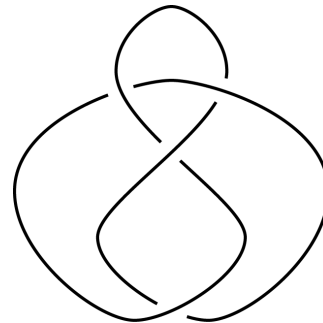
もう一つの拡張として、リー環を様々に変えて得られる量子不変量の漸近挙動と、基本群の対応するリー群への表現、さらに、その表現に付随した上述の幾何的量との関係性を調べてゆきたい。

3. 研究の方法

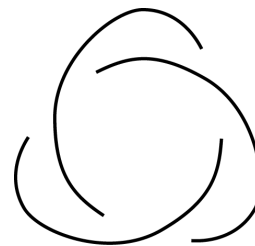
結び目補空間に、非圧縮トーラスが存在するとき、その結び目は衛星結び目と呼ばれる。衛星結び目でない結び目が単純結び目である。さらに、単純結び目は双曲結び目かトーラス結び目に分かれる。



衛星結び目



双曲結び目



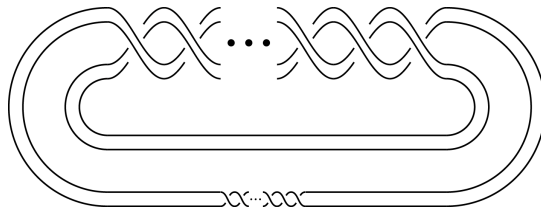
トーラス結び目

本研究では、衛星結び目に着目して「研究の目的」で説明した体積予想の一般化を調べる。特に、衛星結び目のうち cable 結び目と呼ばれるもの（ある結び目にそって何度か回ることによって得られる結び目）に関して、色付き Jones 多項式の漸近挙動を具体的に調べるとともに、結び目群の $SL(2; \mathbb{C})$ への表現とそれに対応した Chern-Simons 不変量や Reidemeister torsion を計算する。

4. 研究成果

結び目の色付き Jones 多項式に関する体積予想とその一般化を中心に研究を行なった。特に、 $(2, 2a+1)$ 型トーラス結び目の

($2, 2b+1$)-cable (下図) に対して体積予想の一般化を調べた。その結果、次の成果が得られた。



トーラス結び目の cable

- A) 上記結び目の色付き Jones 多項式の漸近展開の主要項を求めた。
- B) 結び目補空間の基本群の既約表現を分類した。
- C) 各既約表現に対応した Chern-Simons 不変量を計算した。各既約表現に対応した Reidemeister torsion を計算した。さらにその表現によってひねられたホモロジー群を計算した。
- D) 以上の結果をもとに体積予想の一般化が、上記の結び目に対して成り立つことを示した。

これらの結果は一般の結び目の cabling, さらに衛星結び目に体積予想とその一般化について新たな知見を与えた。なお、この結果は論文にまとめられ投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

K. Hikami and J. Lovejoy: Hecke-type formulas for families of unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariants, *Communications in Number Theory and Physics* 11 (2017), 出版予定 (査読有)

T. Kalman and H. Murakami: Root polytopes, parking functions, and the HOMFLY polynomial, *Quantum Topology* 8 (2017), 205-248, DOI 10.4171/QT/89 (査読有)

J.E. Andersen, H. Fuji, R.C. Penner, and C.M. Reidys: The boundary length and point spectrum enumeration of partial chord diagrams using cut and join recursion, *Trav. Math.* 25 (2017) 213-232 (査読有)

<http://wwwfr.uni.lu/content/download/99021/1192822/file/6boundary.pdf>

J.E. Andersen, H. Fuji, M. Manabe, R.C. Penner, and P. Sułkowski: Partial chord diagrams and matrix models, *Trav. Math.* 25 (2017) 233-283 (査読有)

<http://wwwfr.uni.lu/content/download/99022/1192826/file/7partial.pdf>

J.E. Andersen, H. Fuji, M. Manabe, R.C. Penner, and P. Sułkowski: Enumeration of chord diagrams via topological recursion and quantum curve techniques, *Trav. Math.* 25 (2017) 285-323 (査読有)

<http://wwwfr.uni.lu/content/download/99023/1192830/file/8enumeration.pdf>

K. Hikami and J. Lovejoy: Torus knots and quantum modular forms, *Research in the Mathematical Sciences*, 2:2 (2015) 15 pages DOI: 10.1186/s40687-014-0016-3 (査読有)

K. Hikami and R. Inoue: Braids, complex volume and cluster algebras, *Algebraic & Geometric Topology* 15 (2015) 2175-2194, DOI: 10.2140/agt.2015.15.2175 (査読有)

H. Murakami: The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of a twice-iterated torus knot, *Acta Math. Vietnam.* 39 (2014), no. 4, 649-710, DOI: 10.1007/s40306-014-0084-x (査読有)

K. Hikami and R. Inoue: Braiding operator via quantum cluster algebra, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 47, 474006 (2014) 21pages (査読有)

<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/47/47/474006#>

[学会発表](計23件)

藤 博之: Fatgraph models for RNA molecules, iTHEMS seminar, 2017年3月23日, 理化学研究所(埼玉)

H. Fuji: Partial chord diagrams and matrix models, Colloquium "The Algebra and Geometry of Modern Physics", 2017年3月9日, Department of Physics, University of Warsaw, ポーランド

K. Hikami: q-series and quantum invariants, *Frontiers in Mathematical Physics*, 2017年1月6日, 立教大学(東京)

村上 齊: The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion, 東北結び目セミナー 2016, 2016年10月15日, 東北大学(宮城)

H. Murakami: The colored Jones polynomial and representations of a knot group, Workshop on Volume Conjecture and Quantum Topology, 2016年9月8日, 早稲田大学(東京)

H. Murakami: Colored Jones polynomial and $SL(2; \mathbb{C})$ representations of a knot group, *Knots in Hellas 2016*, 2016年7月21日, International Olympic Academy, Ancient Olympia(ギリシャ)

H. Murakami: On a generalization of the volume conjecture for cable knots, 2016 International Conference on

Low-Dimensional Topology, 2016年6月13日, Southwest Jiaotong University, Emei, Sichuan (中国)

K. Hikami: Quantum modular form from knots and 3-manifolds, Number Theory and Physics, 2016年5月23日, Institut Henri Poincaré (フランス)

K. Hikami: Quantum modular form, Number Theory Seminar, 2016年3月16日, Pohang University of Science and Technology (韓国)

K. Hikami: Quantum dilogarithm and quantum invariant, Quantum Topology Seminar, 2016年3月15日, Pohang University of Science and Technology (韓国)

K. Hikami: Quantum modular forms and quantum invariants, 九州大学代数セミナー 2015年12月11日, 九州大学(福岡)

藤 博之: Enumerating chord diagrams via matrix models, RMT2015: Random matrix theory from fundamental mathematics to biological applications, 2015年11月6日, 沖縄科学技術大学院大学(沖縄)

藤 博之: On the enumeration of chord diagrams and the BPZ equation via the matrix model, Quantization of Spectral Curves, 2015年11月2日, 大阪市立大学(大阪)

H. Fuji: Enumerating chord diagrams via matrix models, 96e rencontre entre mathématiciens et physiciens théoriciens : Géométrie et biophysique, 2015年9月17日, IRMA, ストラスブール大学(フランス)

藤 博之: Matrix Model Approach to RNA, 離散的手法による場と時空のダイナミクス, 2015年9月14日, 岡山衛生会(岡山)

村上 斉: On the volume conjecture and its generalizations, 拡大 KOOK セミナー 2015, 2015年8月21日, 神戸大学(兵庫)

H. Murakami: The colored Jones polynomials, the Chern-Simons invariants, and the Reidemeister torsions of a knot, Invariants in Low Dimensional Geometry, 2015年8月11日, Gazi University, Ankara (トルコ)

H. Murakami: The volume conjecture for non-simple knots, First Encounter to Quantum Topology, 2015年7月20日, Korea Institute for Advanced Study (韓国)

樋上 和弘: モックテータ函数の周辺, 東北大学情報科学研究科談話会, 2015年1月16日, 東北大学大学院情報科学研究科(宮城)

K. Hikami: Quantum modular form from torus knots, Low-Dimensional Topology and Number Theory, 2014年8月22日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (ドイツ)

②① H. Murakami: The colored Jones

polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of a cable knot, Low-dimensional Topology and Number Theory, 2014年8月20日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (ドイツ)

②② H. Murakami: On the volume conjecture and its generalizations, The 2014 KMJ Conference for Accreditation Strategies, 2014年8月8日, Kyungpook National University, Daegu (韓国)

②③ K. Hikami: (mock) modular form and quantum invariant, Mock Modular Forms and Physics: Black Holes, Moonshine, and Conformal Field Theory, 2014年4月15日, The Institute of Mathematical Sciences, Chennai (インド)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

村上 斉 (MURAKAMI, HITOSHI)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号: 70192771

(2) 研究分担者

樋上 和弘 (HIKAMI, KAZUHIRO)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号: 60262151

藤 博之 (FUJI HIROYUKI)
香川大学・教育学部・准教授
研究者番号: 50391719

(3) 連携研究者

()

研究者番号:

(4) 研究協力者

()